$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{x}{4+x^2}}{2x}$$ (appling L'Hopital's rule)

$= 0$

$\Rightarrow L = e^0 = 1$

(B) For a = 1

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{\sqrt{4+x^2}}\right)^{\frac{x^3+1}{x^2+1}}$$ (1^∞ form)

$$L = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2}}\right)\frac{x^3+1}{x^2+1}}$$

$$L = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{\sqrt{4+x^2}\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right)\frac{x^3+1}{x^2+1}}$$

$$L = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$L = e^{\frac{4}{2}} = e^2$$

D04/2/124. If $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3; & -2<x<0 \\ x^3+x^2+2; & 0\le x<2 \\ 3-2x; & 2<x\le 5 \end{cases}$ and $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x\le -2 \\ x+1; & |x|<2 \\ |x-3|; & 2\le x<4 \\ x+2; & 4\le x<7 \end{cases}$ then :

यदि $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3; & -2<x<0 \\ x^3+x^2+2; & 0\le x<2 \\ 3-2x; & 2<x\le 5 \end{cases}$ तथा $g(x) = \begin{cases} 2x-3; & x\le -2 \\ x+1; & |x|<2 \\ |x-3|; & 2\le x<4 \\ x+2; & 4\le x<7 \end{cases}$ तो :

(A) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -3$ (B) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$ (C) $\lim\limits_{x\to 3^+}(fog)(x) = 2$ (D) $\lim\limits_{x\to 3^+}(fog)(x) = 3$

Ans. ABC

Sol. (A) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -3$ so $\lim\limits_{x\to 3} = -3$

(B) $\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = 0$ so $\lim_{x\to -1} = 0$

(C,D) $\lim_{x\to 3^+} g(x) = 0^+$ $\quad \lim_{x\to 3^+}(g(x)) = \lim_{x\to 0^+} = f(x) = 2$

D09/2/125. Let $f : [1, \infty) \to R$ and $f(x) = x\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - e^x$, then :

(A) f(x) is an increasing function

(B) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tends to ∞

(C) $f'(x)$ has a maxima at $x = e$

(D) f(x) is decreasing function

माना $f : [1, \infty) \to R$ तथा $f(x) = x\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - e^x$ हो, तब :

(A) f(x) वर्धमान फलन है

(B) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, अनन्त की ओर अग्रसर है

(C) $f'(x)$ का $x = e$ पर उच्चिठ है

(D) f(x) ह्यासमान फलन है

Ans. AB

Sol. $f'(x) = x\left(\frac{e^x}{x}\right) + \int_1^x \frac{e^t}{x}dt - e^x$

$= \int_1^x \frac{e^t}{t}dt > 0$

$\Rightarrow$ f(x) is an increasing

again as $x \to \infty$ $\quad f(x) = x\left(\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - \frac{e^x}{x}\right)$

$x \to \infty, \left(\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - \frac{e^x}{x}\right) \to \infty$

$\Rightarrow f(x) \to \infty$

D09/2/126. A function $f : R \to R$ is given by $f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, then :

(A) f has a continuous derivative $\forall\, x \in R$

(B) f is a bounded function

(C) f has an global minimum at $x = 0$

(D) f'' is continuous $\forall\, x \in R$

एक फलन $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x^4\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ से दिया गया है, तो :

(A) f का सतत् अवकलन है $\forall\ x \in R$

(B) f एक परिबद्ध फलन है

(C) f का स्थानीय न्यूनतम x = 0 पर है

(D) f′′ सतत् है $\forall\ x \in R$

Ans. AC

Sol. $f(x) = 2x^4 + x^4 \sin\frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$= 0 \qquad x = 0$

$f'(x) = 8x^3 + 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}$

D09/2/127. Let g(x) be a cubic polynomial having local maximum at x = – 1 and g′(x) has a local minimum at x = 1. If g(–1) = 10, g(3) = – 22, then :

(A) perpendicular distance between its two horizontal tangents is 12

(B) perpendicular distance between its two horizontal tangents is 32

(C) g(x) = 0 has atleast one real root lying in interval (–1, 0)

(D) g(x) = 0, has 3 distinct real roots

मान लीजिए g(x) एक त्रिघाती बहुपद है जिसका स्थानीय उच्चिष्ठ x = – 1 पर है तथा g′(x) का स्थानीय निम्निष्ठ x = 1 पर है। यदि g(–1) = 10, g(3) = – 22 है, तो :

(A) दो क्षैतिज स्पर्श रेखाओं के मध्य की लम्बवत् दूरी 12 है

(B) दो क्षैतिज स्पर्श रेखाओं के मध्य की लम्बवत् दूरी 32 है

(C) g(x) = 0 का कम से कम एक वास्तविक मूल अंतराल (–1, 0) में है

(D) g(x) = 0 के तीन भिन्न वास्तविक मूल हैं

Ans. BD

Sol. Let g''(x) = a(x – 1)

$g'(x) = \frac{ax^2}{2} - ax + b$

$g'(-1) = 0 \Rightarrow b = -\frac{3a}{2}$

$g(x) = \frac{ax^3}{6} - \frac{ax^2}{2} + bx + c \Rightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \qquad (\because g(-1) = 10, g(3) = -22)$

D09/2/128. The function $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + 5$ has a maximum and a minimum for :

फलन $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + 5$ के लिए अधिकतम तथा नयूनतम है :

(A) $\lambda \in (-4, \infty)$ (B) $\lambda \in (-\infty, 0)$ (C) $\lambda \in (-3, 3)$ (D) $\lambda \in (1, \infty)$

Ans. ABCD

Sol. $f(x) = 2x^3 - 3(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 6(\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$ has two real roots, then

$D > 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 8\lambda + 12 > 0$

$\Rightarrow \quad \lambda \in R$

D09/2/129. Let m and n be positive integers and $x, y > 0$ and $x + y = k$, where k is constant. Let $f(x, y) = x^m y^n$, then :

(A) f(x, y) is maximum when $x = \frac{mk}{m+n}$ (B) f(x, y) is maximum where $x = y$

(C) maximum value of f(x, y) is $\frac{m^n n^m k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ (D) maximum value of f(x, y) is $\frac{k^{m+n} m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$

माना m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं तथा $x, y > 0$ तथा $x + y = k$, जहाँ k अचर है। माना $f(x, y) = x^m y^n$, तो :

(A) f(x, y) अधिकतम है जब $x = \frac{mk}{m+n}$ (B) f(x, y) अधिकतम है जहाँ $x = y$

(C) f(x, y) का अधिकतम मान $\frac{m^n n^m k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ है (D) f(x, y) का अधिकतम मान $\frac{k^{m+n} m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ है

Ans. AD

Sol. $f(x, y) = x^m (k - x)^n$

$f'(x, y)\ mx^{m-1} (k - x)^n - x^m n \cdot (k - x)^{n-1} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{mk}{m+n}$

Maximum value $= \frac{k^{m+n}.m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}$

D09/2/130. Which of the following is/are true for the function $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt, (x > 0)$?

(A) f(x) is monotonically increasing in $\left((4n-1)\frac{\pi}{2}, (4n+1)\frac{\pi}{2}\right) \forall\ n \in N$

(B) f(x) has a local minima at $x = (4n-1)\frac{\pi}{2} \forall n \in N$

(C) The points of inflection of the curve y = f(x) lie on the curve x tan x + 1 = 0

(D) Number of critical points of y = f(x) in (0, 10π) are 19

फलन $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt$, (x > 0) के निम्न में से कौनसा/से सही है/हैं ?

(A) f(x) एक $\left((4n-1)\frac{\pi}{2}, (4n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ में एकरस वर्धमान (monotonically increasing) फलन है $\forall$ n $\in$ N

(B) f(x) का $x = (4n-1)\frac{\pi}{2} \forall n \in N$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ है

(C) वक्र y = f(x) के नति परिवर्तन बिन्दु (point of inflection) वक्र x tan x + 1 = 0 पर स्थित है

(D) y = f(x) के अंतराल (0, 10π) में क्रांतिक बिन्दुओं की संख्या 19 है

Ans. ABC

Sol. $f'(x) = \frac{\cos x}{x}$

Clearly $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left((4n-1)\frac{\pi}{2}, (4n+1)\frac{\pi}{2}\right) \forall$ n $\in$ N

and $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left((4n+1)\frac{\pi}{2}, (4n+3)\frac{\pi}{2}\right) \forall$ n $\in$ N

$\therefore$ f(x) has a local minima at $x = (4n-1)\frac{\pi}{2} \forall n \in N$

and f(x) has a local maxima at $x = \frac{\pi}{2}$ and $(4n+1)\frac{\pi}{2} \forall n \in N$.

Also $f''(x) = \frac{x(-\sin x) - \cos x}{x^2} = 0 \Rightarrow x \tan x + 1 = 0$

$\therefore$ All the points of inflection of f(x) lie on the curve xtan x + 1 = 0

Also $f'(x) = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \forall n \in N$

$\therefore$ Number of values of x in (0, 10π) in which f'(x) = 0 are 20.

D09/2/131. Let $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, F(0) = 6 where f(x) is a thrice differentiable function such that $|f(x)| \le 1 \forall x \in [-1, 1]$, then choose the correct statement(s) :

(A) there is atleast one point in each of the intervals (–1, 0) and (0, 1) where $|f'(x)| \le 2$

(B) there is atleast one point in each of the intervals (–1, 0) and (0, 1) where $F(x) \le 5$

(C) there is no point of local maxima of F(x) in (–1, 1)

(D) for some $c \in (-1, 1)$, $F(c) \geq 6$, $F'(c) = 0$ and $F''(c) \leq 0$

माना $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, $F(0) = 6$ तीन बार अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [-1, 1]$, तो निम्न में से सत्य कथन है :

(A) प्रत्येक अंतराल (–1, 0) तथा (0, 1) में कम से कम एक बिन्दु है जहाँ $|f'(x)| \leq 2$

(B) प्रत्येक अंतराल (–1, 0) तथा (0, 1) में कम से कम एक बिन्दु है जहाँ $F(x) \leq 5$

(C) F(x) का अंतराल (–1, 1) में कोई स्थानीय उच्चिष्ठ नहीं है

(D) कुछ $c \in (-1, 1)$ के लिए, $F(c) \geq 6$, $F'(c) = 0$ तथा $F''(c) \leq 0$

Ans. ABD

Sol. $|f(x)| \leq 1$

Applying L.M.V.T in $x \in (0, 1)$

$\Rightarrow \quad |f'(x)| = |f(1) - f(0)|$

$|f(1) - f(0)| \leq 2$

$\Rightarrow \quad |f'(x) \leq 2$ for atleast one x in (0, 1)

Similarly $|f'(x)| \leq 2$ for atleast one x is (– 1, 0)

$F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$

For atleast one x in (0, 1) & (– 1, 0)

$|f'(x)| \leq 2$ & $|f(x)| \leq 1$

$\Rightarrow \quad (f'(x))^2 \leq 4$ & $(f(x))^2 \leq 1$

$\Rightarrow \quad (f'(x))^2 + (f(x))^2 \leq 5$

$\Rightarrow \quad F(x) \leq 5$, for atleast one x in (– 1, 0) & (0, 1)

D09/2/132. Given $f(x) = x^4.e^{-x^2}$; $x \in R$; then :

(A) Minimum value of f(x) is 0

(B) Maximum value of f(x) is $4e^{-2}$

(C) Line y = 4 cuts f(x) at 2 points

(D) f(x) is symmetric about y-axis

दिया गया है कि $f(x) = x^4.e^{-x^2}$; $x \in R$; तो :

(A) f(x) का न्यूनतम मान 0 है

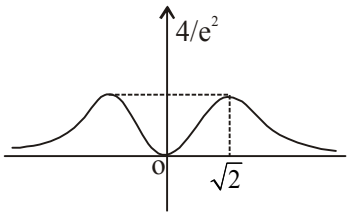
(B) f(x) का अधिकतम मान $4e^{-2}$ है

(C) रेखा y = 4 फलन f(x) को 2 बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है

(D) f(x), y के लिए सममित है

Ans. ABD

Sol.



D09/2/133. Let y = f(x) such that x y = x + y + 1, x ∈ R – {1} and g(x) = xf(x). The local minimum value of g(x) is $a+b\sqrt{b}$, then (a, b ∈ N) :

माना y = f(x) इस प्रकार है कि xy = x + y + 1, x ∈ R – {1} तथा g(x) = xf(x). यदि g(x) का स्थानीय न्यूनतम मान $a+b\sqrt{b}$ है, तो (a, b ∈ N) :

(A) a + b = 5 (B) a – b = 1 (C) 2a = 3b (D) $a^2 + b^2 = 13$

Ans. ABCD

Sol. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$g(x)=\frac{x(x+1)}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}$

$g'(x)=1-\frac{2}{(x-1)^2}=0$

$x=1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$

$g''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$

$g''\left(1+\sqrt{2}\right)>0$

Minimum value of g(x) is $3+2\sqrt{2}$

D09/2/134. Let $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+4 & x<1\\ a+x^2 & x\ge 1\end{cases}$:

(A) If f(x) is continuous ∀ x ∈ R, then a = 3
(B) If f(x) is differentiable ∀ x ∈ R, then a = 3
(C) If f(x) has a local minima at x = 1, then a ≤ 3
(D) If a = 4 & f(x) = k has exactly one solution, then k ∈ (4,5]

माना $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 4 & x < 1 \\ a + x^2 & x \geq 1 \end{cases}$:

(A) यदि $\forall\ x \in R$ के लिए f(x) सतत् है, तो a = 3

(B) यदि $\forall\ x \in R$ के लिए f(x) अवकलनीय है, तो a = 3

(C) यदि $f(x)$ का x = 1 पर स्थानीय निम्निष्ठ है, तो $a \leq 3$

(D) यदि a = 4 तथा $f(x) = k$ का ठीक एक हल है, तो $k \in (4,5]$

Ans. AC

Sol. (A) For continuity $f(1^-) = f(1^+) \equiv f(1)$

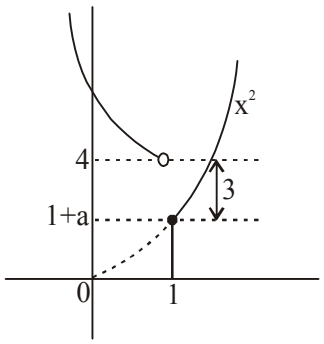
$\Rightarrow 4 = a + 1 \Rightarrow a = 3$

(B) $\because f(x)$ is differentiable

$\Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \quad \Rightarrow \quad 2(x-1)|_{x=1} = 2.1$

which is not possible.

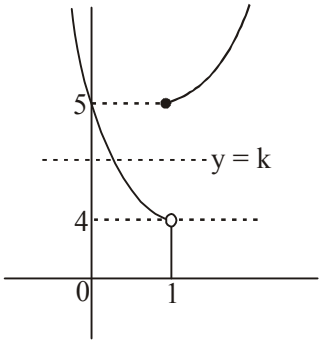
(C)



if x =1 is point of minima then $a \leq 3$

(D) a = 4

$\Rightarrow k \in (4,5)$



D09/2/135. Which of the following statement(s) is/are correct ?

(A) Rolle's theorem is applicable to the function $F(x) = 1 - \sqrt[5]{x^6}$ on the interval [–1, 1].

(B) The domain of definition of the function $F(x)=\dfrac{\log_4\left(5-[x-1]-[x]^2\right)}{x^2+x-2}$ is $(-3,-2)\cup(-2,1)\cup(1,2)$

(where [x] denotes the largest integer less than or equal to x)

(C) The value of a for which the function $F(\theta)=a\sin\theta+\dfrac{1}{3}\sin 3\theta$ has an extremum at $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ is –2.

(D) The value of $\sum_{k=1}^{2010}\dfrac{\{x+k\}}{2010}$ is {x} (where { x } denotes the fractional part of x).

निम्न में से कौनसे कथन सत्य है ?

(A) फलन $F(x)=1-\sqrt[5]{x^6}$ के लिए अन्तराल [–1, 1] में रॉल प्रमेय लागु होगी

(B) फलन $F(x)=\dfrac{\log_4\left(5-[x-1]-[x]^2\right)}{x^2+x-2}$ का प्रान्त $(-3,-2)\cup(-2,1)\cup(1,2)$ होगा।

(जहाँ [x] महतम पूर्णांक फलन को दर्शाता है)

(C) a का मान, जिसके लिए फलन $F(\theta)=a\sin\theta+\dfrac{1}{3}\sin 3\theta$ का चरम बिन्दु $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ है, –2 होगा

(D) $\sum_{k=1}^{2010}\dfrac{\{x+k\}}{2010}$ का मान {x} होगा।

(जहाँ { x } भिन्नात्मक भाग फलन दर्शाता है)

Ans. AD

Sol. **(A)** We have $F(x)=\left(1-x^{\frac{6}{5}}\right)\Rightarrow F'(x)=\dfrac{-6}{5}x^{\frac{1}{5}}$ exist $\forall\, x\in(-1,1)$

Also $F(-1)=0=F(1)$

Hence Rolles's theorem is applicable to the function F(x).

(B) For domain of F(x),

$5-[x]+1-[x]^2>0$ and $x^2+x-2\neq 0$ $\Rightarrow (x+2)(x-1)\neq 0$ $\Rightarrow x\neq -2, 1$

Now $[x]^2+[x]-6<0$

$\Rightarrow ([x]+3)([x]-2)<0$

$\Rightarrow -3<[x]<2$

$\Rightarrow -2\le x<2$

$\therefore$ Domain $=(-2,1)\cup(1,2)$

(C) We have $F(\theta)=a\sin\theta+\dfrac{1}{3}\sin 3\theta$

As $F(\theta)$ has an extremum at $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, so

$\Rightarrow a\cos\theta + \cos 3\theta = 0$ at $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$

(D) We have $\sum_{k=1}^{2010} \frac{\{x+k\}}{2010} = \frac{\{x+1\}}{2010} + \frac{\{x+2\}}{2010} + ... + \frac{\{x+2010\}}{2010} = \frac{2010\{x\}}{2010} = x$

D09/2/136. The function $y = f(x)$ is represented parametrically as :

$x = g(t) = t^5 - 5t^3 - 20t + 7$

$(-2 < t < 2)$

$y = h(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3$

Which of the following statement are true ?

(A) f(x) has exactly one point of maximum for $t \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

(B) f(x) has exactly one point of minimum for $t \in (0, 1)$

(C) f(x) has exactly one point of minimum for $t \in (1, 2)$

(D) $t = -1$ is a point of maximum for f(x)

फलन $y = f(x)$ के प्राचलिक समीकरण निम्न है :

$x = g(t) = t^5 - 5t^3 - 20t + 7$

$(-2 < t < 2)$

$y = h(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3$

निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है ?

(A) $t \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ के लिए f(x) का केवल एक उच्चिष्ठ बिन्दु होगा

(B) $t \in (0, 1)$ के लिए f(x) का केवल एक निम्निष्ठ बिन्दु होगा

(C) $t \in (1, 2)$ के लिए f(x) का केवल एक निम्निष्ठ बिन्दु होगा

(D) $t = -1$, f(x) का उच्चिष्ठ बिन्दु है

Ans. CD

Sol. $y^2 = 4x \quad y^2 = (x - k)$

Let point $P(t_1^2, 2t_1)$ $\quad \theta\left(\frac{t_2^2}{4} + k, \frac{t_2}{2}\right)$

slope of normal at P = slope of normal at 6) = slope of PQ
(It PQ is common normal)

$y_T^1 = \frac{4}{2y} = \frac{1}{t_1}$ $\qquad$ $y_T^1 = \frac{1}{2y} = \frac{1}{t_2}$

$y_N^1 = -t_1$ $\qquad$ $y_N^1 = -t_2$

$$-t_1 = -t_2 = \frac{\frac{t_2}{2} - 2t_1}{\frac{t_1^2}{4} + 16 - t_1^2}$$

$t_1 = t_2$

$$-t_2\left(\frac{t_2^2}{4} + k - t_1^2\right) = \left(\frac{t_2}{2} - 2t_1\right)$$

$$-t_2\left(\frac{-3}{4}t_2^2 + k\right) = t_2\left(\frac{-3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{4}t_2^2 = \frac{-3}{2} + k$$

$$\frac{-3}{2} + k > 0$$

$$k > \frac{3}{2}$$

D09/2/137. If $f(x) = e^{-ax}(x^2 + ax + b)$ $(a > 0)$ has points of extremum at points $x = -2$ & $x = 1$, then :

यदि $f(x) = e^{-ax}(x^2 + ax + b)$ $(a > 0)$ का बिन्दु $x = -2$ एवं $x = 1$ पर चरमबिन्दु हो, तो :

(A) $a = 2, b = -1$ $\qquad$ (B) $a = 1, b = -2$

(C) $f''(-2) < 0$ & $f''(1) > 0$ $\qquad$ (D) $f''(-2) > 0$ & $f''(1) < 0$

Ans. AD

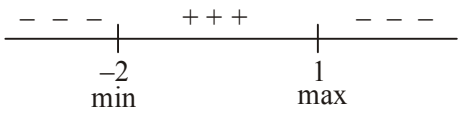
Sol. $f'(x) = -e^{ax}(ax^2 + (a^2 - 2)x + ab - a)$

$\because f(-2) = f(1) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{(a^2 - 2)}{a} = -1 \ \& \ \frac{ab - a}{a} = -2$$

$\Rightarrow a = 2$ & $b = -1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2e^{2x}(x+2)(x-1)}{\left(x^2+2x-1\right)}$$



D09/2/138. Let $f(x) = \sin^3 x + \lambda \sin^2 x$ for $-\pi/2 < x < \pi/2$. Integral values of λ such that f(x) has exactly one minimum and one maximum :

माना $-\pi/2 < x < \pi/2$ के लिए $f(x) = \sin^3 x + \lambda \sin^2 x$ है। λ के पूर्णांक मान जिनके लिए f(x) का ठीक एक अकधिकतम तथा ठीक एक न्यूनतम हो :

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1

Ans. BD

Sol. We have,

$f(x) = \sin^3 x + \lambda \sin^2 x$

$\therefore f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x + 2\lambda \sin x \cos x$

$$= \frac{3}{2}\sin 2x \sin x + \lambda \sin 2x$$

$$= \left(\frac{3}{2}\sin x + \lambda\right)\sin 2x$$

For local maximum or minimum, we must have

$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\sin x + \lambda\right)\sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 0 \text{ or, } \frac{3}{2}\sin x + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ or, } \sin x = \frac{-2\lambda}{3}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ or, } x = \sin^{-1}\left(\frac{-2\lambda}{3}\right)$$

Now,

$$f''(x) = \frac{3}{2}\cos x \sin 2x + 2\left\{\frac{3}{2}\sin x + \lambda\right\}\cos 2x$$

$$= \frac{3}{2}\cos x \sin 2x + \left(3\sin x + 2\lambda\right)\cos 2x$$

$\therefore f''(0) = 2\lambda$

It is given that

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$\therefore -1 < \sin x < 1$

$$\Rightarrow -1 < -\frac{2\lambda}{3} < 1$$

$\Rightarrow 3 > 2\lambda > -3$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$$

Case I When $-3/2 < \lambda < 0$

In this case, x lies between 0 and $\pi/2$

Also, $f''(0) = 2\lambda < 0$

$\therefore$ $x = 0$ is a point of local minimum.

For xc, $x = \sin^{-1}\left(\frac{-2\lambda}{3}\right)$, we have

$$f''(x) = \frac{3}{2}\cos x \sin 2x + 0 > 0 \quad [\because x \in (0, \pi/2)]$$

$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{-2\lambda}{3}\right)$ is a point of local minimum.

Thus, f(x) has exactly one maximum and one minimum.

Case II When $0 < \lambda < 3/2$

In this case, x lies between $-\pi/2$ and 0.

Also, $f''(0) = 2\lambda > 0$

So, $x = 0$ is a point of local minimum.

For $x = \sin^{-1}\left(\frac{-2\lambda}{3}\right)$, we have

$$f''(x) = \frac{3}{2}\cos x \sin 2x < 0 \qquad [\because x \in (-\pi/2, 0) \therefore \sin 2x < 0]$$

$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{-2\lambda}{3}\right)$ is a point of local maximum.

Thus, f(x) have exactly one minimum and one maximum.

Hence, λ must lie in the interval $(-3/2, 0) \cup (0, 3/2)$.

D06/2/139. If $f(x) = 2^x + x^3 + 1$ and $g(x) = f^{-1}(x)$, then :

(A) $g'(2) = 1$ (B) $g'(2) = \log_2 e$ (C) $g''(2) = (\ln 2)^2$ (D) $g''(2) = -\log_2 e$

(where dash (') denotes derivative)

यदि $f(x) = 2^x + x^3 + 1$ तथा $g(x) = f^{-1}(x)$, तब :

(A) $g'(2) = 1$ (B) $g'(2) = \log_2 e$ (C) $g''(2) = (\ln 2)^2$ (D) $g''(2) = -\log_2 e$

(जहाँ (') अवकलन को दर्शाता है)

Ans. BD

Sol. $f(x) = 2x + x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2^x \ell n2 + 3x^2$

$\Rightarrow f''(x) = 2^x(\ell n2)^2 + 6x$

$f(0) = 2, g(g(x)) = x \qquad \Rightarrow g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

$$\Rightarrow g''(f(x)) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$$

$$g''(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ell \ln 2} = \log_2 e$$

$g''(2) = -\log_2 e$

D06/2/140. If $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, then identify the correct option(s) (where $f^n(x)$ represent $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$:

(A) $f^{2013}(x)$ is an odd function (B) $f^{2014}(x)$ is an even function

(C) $f^n(x)$ is always an odd function (D) $f^n(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{(x-1)^{n-1} - (x-1)^{n-1}}{(x^2-1)^{n-1}}\right]$

यदि $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ हो, तो सही विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये, (जहाँ $f^n(x)$, $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ को दर्शाता है) :

(A) $f^{2013}(x)$ एक विषम फलन है (B) $f^{2014}(x)$ एक सम फलन है

(C) $f^n(x)$ सदैव विषम फलन है (D) $f^n(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{(x-1)^{n-1} - (x-1)^{n-1}}{(x^2-1)^{n-1}}\right]$

Ans. ABD

Sol. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x)$ is an even function"its derivative is an odd function

$f^{2013}(x)$ is an odd function

$f^{2014}(x)$ is an even function

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$f^n(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2}\left(\frac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{\left(x^2-1\right)^{n+1}}\right)$$

D06/2/141. Let $f:R\to A$ be an invertible function defined by $f(x)=\log_2(2^{x^3+x}+4)$. If g(x) be its inverse function, then :

माना $f:R\to A,\ f(x)=\log_2(2^{x^3+x}+4)$ द्वारा परिभाषित एक प्रतिलोमी फलन है। यदि g(x) इसका प्रतिलोम फलन हो, तो :

(A) $g(3)=2$ (B) $g'(3)=\frac{1}{2}$ (C) $\lim\limits_{x\to3}(g(x))^{\frac{\ell n4}{x-3}}=2$ (D) set A is $(2,\infty)$

Ans. BCD

Sol. (A) $f(1)=\log_2(4+4)=3\ \Rightarrow g(3)=1$

(B) $f'(x)=\dfrac{2^{\left(x^3+x\right)}\ln 2\left(3x^2+1\right)}{\ln 2\left(2^{x^3+x}+4\right)}$

$f'(1)=\dfrac{4(4)}{8}=2$

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(C) $g(3)=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3}(g(x))^{\frac{\ln4}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to3}\left(g(x)-1\right)\times\frac{\ell n4}{x-3}}$

$=e^{g'(3)\cdot\ln4}=e^{\frac{1}{2}\ln4}=2$

(D) $f(x)_{min}=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\log_2\left(2^{-\infty}+4\right)=2$

so range is $(2,\infty)$

D06/2/142. For $f(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$ identify correct option(s) :

(A) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ell n(1-x^2)}=-2$

(B) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ell n(1-x^2)}$ does not exist

(C) least value of 'n', for which $\frac{d^n}{dx^n}(f(x)-2x^2)$ at $x=0$ is non-zero, is 4

(D) least value of 'n', for which $\frac{d^n}{dx^n}(f(x)-2x^2)$ at $x=0$ is non-zero, is 6

$f(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$ के लिये सत्य कथन/कथनों का चयन कीजिए :

(A) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ell n(1-x^2)}=-2$

(B) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ell n(1-x^2)}$ विद्यमान नहीं है

(C) 'n' का न्यूनतम मान जिसके लिए $x = 0$ पर $\frac{d^n}{dx^n}(f(x)-2x^2)$ अशून्य हो 4 होगा

(D) 'n' का न्यूनतम मान जिसके लिए $x = 0$ पर $\frac{d^n}{dx^n}(f(x)-2x^2)$ अशून्य 6 होगा

Ans. AD

Sol. $f(x)=2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots\right)-2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.\right)$

$=2x^2+4\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$

Now, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln\left(1-x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\frac{4x^6}{6!}+\ldots\ldots}{\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{-x^2}\left(-x^2\right)}=-2$

and $f(x)-2x^2=4\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$

least value of n is 6.

D06/2/143. If f(x) is differentiable function on R and $g(x)=2^{-x}f(x.2^{-x}+\lambda)$ $(\lambda\in R)$:

(A) $g'(0)+g(0)\ln 2=f'(\lambda)$ (B) $g'(0)+g(0)\ln 2=-f'(\lambda)$

(C) $(2^x g(x))'(0) = -f'(\lambda)$ (D) $(2^x g(x))'(0) = f'(\lambda)$

यदि f(x), R पर अवकलनीय फलन है तथा $g(x) = 2^{-x} f(x.2^{-x} + \lambda)$ $(\lambda \in R)$:

(A) $g'(0) + g(0) \ln 2 = f'(\lambda)$ (B) $g'(0) + g(0) \ln 2 = -f'(\lambda)$

(C) $(2^x g(x))'(0) = -f'(\lambda)$ (D) $(2^x g(x))'(0) = f'(\lambda)$

Ans. AD

Sol. $g'(x) = -2^{-x}(\ell n2)\, f(x \cdot 2^{-x} + \lambda) + 2^{-x} f'(x \cdot 2^{-x} + \lambda)\, \{2^{-x} - x2^{-x}\, \ell n2\}$

$g'(0) = -\ell n2\, f(\lambda) + f'(\lambda)$

$g'(0) + g(0)\ell n2 = f'(\lambda)$

$(2^x g(x))' = f'(x \cdot 2^{-x} + \lambda)\, \{2^{-x} - x2^{-x}\, \ell n2\}$

$\Rightarrow (2^x g(0))' = f'(\lambda)$

D06/2/144. If $f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right)\right)$ then f'(x) is equal to :

(A) $\frac{\sin x}{x}$ (B) $\frac{x}{\sin x}$ (C) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ (D) $\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

यदि $f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right)\right)$ है, तो f '(x) बराबर होगा :

(A) $\frac{\sin x}{x}$ (B) $\frac{x}{\sin x}$ (C) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ (D) $\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

Ans. C

Sol. $f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2^3}.....\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin x}{x}$

D06/2/145. If $F(x) = f(x)\, g(x)$ and $f'(x)\, g'(x) = c$, then :

(A) $F' = c\left[\frac{f}{f'} + \frac{g}{g'}\right]$ (B) $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{2c}{fg}$ (C) $\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{g'''}{g}$ (D) $\frac{F'''}{F''} = \frac{f'''}{f''} + \frac{g'''}{g''}$

यदि $F(x) = f(x)\, g(x)$ तथा $f'(x)\, g'(x) = c$ है, तब :

(A) $F' = c\left[\frac{f}{f'} + \frac{g}{g'}\right]$ (B) $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{2c}{fg}$ (C) $\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{g'''}{g}$ (D) $\frac{F'''}{F''} = \frac{f'''}{f''} + \frac{g'''}{g''}$

Ans. ABC

Sol. $F'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$

$$F'(x) = c\left[\frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{g(x)}{g'(x)}\right]$$

$F'' = f''g + 2g'\,f' + g''\,f$

$$\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{2c}{fg}$$

$F''' = f'''\,g + f''\,g' + 2g''\,f' + 2f''\,g' + g'''\,f + g''\,f'$

$$\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{g'''}{g} \qquad (\because\ (f'\,g')' = 0)$$

D08/2/146. Let $f : [0, 8] \to R$ be differentiable function such that $f(0) = 0$, $f(4) = 1$, $f(8) = 1$ then which of the following hold(s) good ?

(A) There exist some $c_1 \in (0, 8)$ where $f'(c_1) = \frac{1}{4}$

(B) There exist some $c \in (0, 8)$ where $f'(c) = \frac{1}{12}$

(C) There exist $c_1, c_2 \in [0, 8]$ where $8\,f'(c_1)\,f(c_2) = 1$

(D) There exist some $\alpha, \beta \in (0, 2)$ such that $\int_0^8 f(t)\,dt = 3(\alpha^2 f(\alpha^3) + \beta^2 f(\beta^3))$

अवकलनीय फलन $f : [0, 8] \to R$ इस प्रकार है कि $f(0) = 0$, $f(4) = 1$, $f(8) = 1$ निम्न में से कौनसा/से विकल्प सत्य होगा/होंगे ?

(A) अंतराल $(0, 8)$ में c_1 विद्यमान होगा जहाँ $f'(c_1) = \frac{1}{4}$

(B) अंतराल $(0, 8)$ में c विद्यमान होगा जहाँ $f'(c) = \frac{1}{12}$

(C) अंतराल $[0, 8]$ में c_1, c_2 विद्यमान होंगे जहाँ $8\,f'(c_1)\,f(c_2) = 1$

(D) अंतराल $(0, 2)$ में α, β इस प्रकार विद्यमान होंगे कि $\int_0^8 f(t)\,dt = 3(\alpha^2 f(\alpha^3) + \beta^2 f(\beta^3))$

Ans. ACD

Sol. (A) $f'(C_1) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1}{4} \quad C_1 \in (0, 4)$

(C) $f'(C_1) = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{1}{8} \quad C_1 \in (0, 8)$

$f(C_2) = f(8) = 1$

(D) Let $g(x) = \int_0^{x^3} f(t)dt$

$\Rightarrow\ g(0) = 0,\ g(2) = \int_0^8 f(t)dt$

$g'(\alpha) = 3\alpha^2 f(\alpha^3) = \frac{g(2)-g(0)}{2}\quad \alpha \in (0, 2)$

and $g'(\beta) = 3\beta^2 f(\beta^3) = \frac{g(2)-g(0)}{2}\quad \beta \in (0, 2)$

$g'(\alpha) + g'(\beta) = g(2) - g(0) = \int_0^8 f(t)dt$

D08/2/147. Let f(x) be twice differentiable function such that $f''(x) > 0$ in [0, 2]. Then :

(A) $f(0) + f(2) = 2f(c)$, for atleast one c, $c \in (0, 2)$

(B) $f(0) + f(2) < 2f(1)$

(C) $f(0) + f(2) > 2f(1)$

(D) $2f(0) + f(2) > 3f\left(\frac{2}{3}\right)$

माना अंतराल [0, 2] में f(x) एक द्विअवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f''(x) > 0$ है। तब :

(A) अंतराल (0, 2) में कम से कम एक c विद्यमान होगा जिसके लिए $f(0) + f(2) = 2f(c)$ होगा

(B) $f(0) + f(2) < 2f(1)$

(C) $f(0) + f(2) > 2f(1)$

(D) $2f(0) + f(2) > 3f\left(\frac{2}{3}\right)$

Ans. CD

Sol. $f''(x) > 0\ \ \forall\ x \in [0, 2]$

$\Rightarrow\ f'(x) \uparrow$

$f'(C_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}\ \forall\ C_1 \in (0,1)$ and $f'(C_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$; $f'(C_1) < f'(C_2) \Rightarrow f(0) + f(2) > 2f(1)$

Similarly applying LMVT between $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ and $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$

$$\frac{f(2)-f\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{4}{3}} > \frac{f\left(\frac{2}{3}\right)-f(0)}{\frac{2}{3}} \Rightarrow 2f(0) + f(2) > 3f\left(\frac{2}{3}\right)$$

D08/2/148. Consider $f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x - 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, which of the following is/are correct ?

(A) f is strictly decreasing in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(B) f is strictly increasing in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

(C) There exist a number 'c' in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ such that $f'(c) = 0$

(D) The equation $f(x) = 0$ has only two roots in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x - 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर विचार करें, निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही होगा/होंगे ?

(A) f, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ में निरंतर ह्रासमान

(B) f, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ में निरंतर वर्धमान

(C) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में एक c विद्यमान होगा जिसके लिए $f'(c) = 0$

(D) समीकरण $f(x) = 0$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में केवल दो मूल रखता है

Ans. ABCD

Sol. $f'(x) = 5 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$

Clearly $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$f(0) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

By Rolle's Theorem $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(c) = 0$

Clearly $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f(x) \geq 2\left(\frac{1}{r_2}\right)^5 - 1 = 2\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) - 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1$ and $f(x) < 0\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

D08/2/149. Which of the following statement(s) is(are) incorrect about $f(x) = \frac{e^x}{x}$?

(A) f(x) is increasing in $x \in (0, \infty)$

(B) Tangent on the curve f(x) at x = 1 is perpendicular to x-axis

(C) Tangent on the curve f(x) at x = 1 is parallel to x-axis

(D) Range of f(x) is $[e, \infty)$

$f(x) = \frac{e^x}{x}$ के लि निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन असत्य है ?

(A) $x \in (0, \infty)$ में f(x) वर्धमान है

(B) वक्र f(x) के x = 1 पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत् है

(C) वक्र f(x) के x = 1 पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है

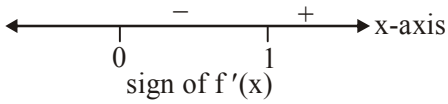
(D) f(x) का परिसर $[e, \infty)$ है

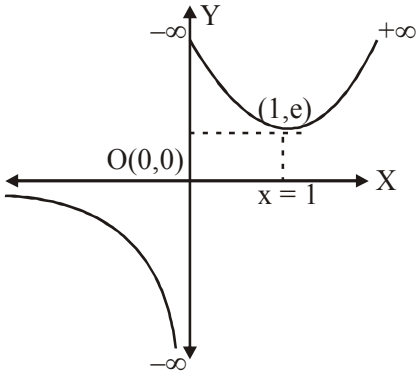
Ans. ABD

Sol. $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

Domain of $f(x) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Also, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$ at x = 1





Range of f(x) $(-\infty, 0) \cup [e, \infty)$

Now, verify alternatives

D08/2/150. Let $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2\phi(x)}{1+\phi^2(x)}\right)$ where $\phi(x)$ is a decreasing function of x, then :

(A) f(x) increasing when $|\phi(x)| < 1$ (B) f(x) is decreasing when $|\phi(x)| < 1$
(C) f(x) is decreasing always (D) f(x) is increasing always

माना $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2\phi(x)}{1+\phi^2(x)}\right)$ है जहां $\phi(x)$, x में एक ह्रसमान फलन है तो :

(A) जब $|\phi(x)| < 1$ है तो f(x) वर्धमान है (B) जब $|\phi(x)| < 1$ है तो f(x) ह्रसमान है
(C) f(x) हमेशा ह्रसमान है (D) f(x) हमेशा वर्धमान है

Ans. B

Sol. $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2\phi(x)}{1+\phi^2(x)}\right)$

Let $\phi(x) = -\tan\theta$ (decreasing)

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = \begin{cases} -2\theta, & \frac{-N}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2} \\ -2\left(\tan^{-1}\left(-\phi(x)\right)\right); & \frac{-\pi}{4}\left(\theta\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ = 2\tan^{-1}\left(\phi(x)\right) & \frac{-\pi}{4}\left(\tan^{-1}\left(-\phi(x)\frac{\pi}{9}\right)\right) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+\phi^2(x)}\phi'(x) < 0$$

If $\phi'(x) < 0$ (decreasing)

D08/2/151. Let $y = f(x)$ be a differentiable function such that $f'(x) > 0\ \forall x \in R$ then which of the following is/are correct ?

(A) $f(3-4x)$ is an increasing function (B) $f(3-4x)$ is a decreasing function
(C) $f(x^2-x)$ is increasing $\forall x > \frac{1}{2}$ (D) $y = (f(x))^3$ is an increasing function

$y = f(x)$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f'(x) > 0\ \forall x \in R$ तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं ?

(A) $f(3-4x)$ एक वर्धमान फलन है (B) $f(3-4x)$ एक ह्रासमान फलन है
(C) $f(x^2-x)$, $x > \frac{1}{2}$ के लिए वर्धमान है (D) $y = (f(x))^3$ एक वर्धमान फलन है

Ans. BCD

Sol. $\frac{d}{dx}f(3-4x) = -4f'(3-4x) < 0$; $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^3 = 3f'(x)\left(f(x)\right)^2 > 0$

$$\frac{d}{dx} f\left(x^2 - x\right) = (2x-1)\, f'(x^2 - x) > 0 \text{ if } x > \frac{1}{2}$$

D08/2/152. Let $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Let $g(x) = 2f^3(x) - 9f^2(x) + 12f(x) + 5$. In which of the following intervals is g(x) increasing?

माना $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ तथा $g(x) = 2f^3(x) - 9f^2(x) + 12f(x) + 5$. तो निम्न में से कौनसा/कौनसे अन्तराल में g(x) वध मान है ?

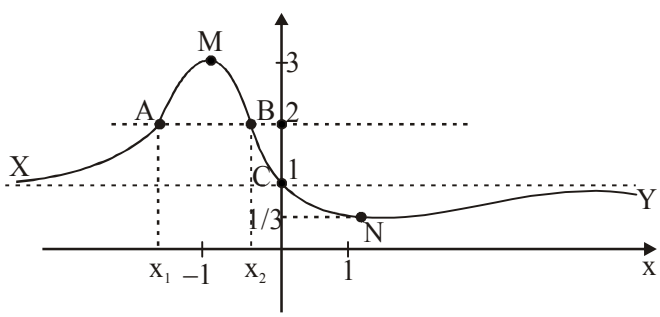
(A) $\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$ (B) $\left(-1, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ (C) $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ (D) $(1, \infty)$

Ans. ACD

Sol. We observe that $g'(x) = (6f^2(x) - 18f(x) + 12)f'(x)$, i.e.

$g'(x) = 6f'(x)\,(f(x) - 1)\,(f(x) - 2)$

We have to find those intervals for which g'(x) is positive. For this purpose, we analyze the function f(x) and draw its graph.



We make the following observations for different sements of the curve :

$$\text{XA}: \left.\begin{array}{r} f'(x) > 0 \\ f(x) - 1 > 0 \\ f(x) - 2 < 0 \end{array}\right\} g'(x) < 0$$

$$\text{AM}: \left.\begin{array}{r} f'(x) > 0 \\ f(x) - 1 > 0 \\ f(x) - 2 > 0 \end{array}\right\} g'(x) > 0$$

The X-coordinates of A and B, i.e., x_1 and x_2 are given by solving $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 2$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{MB}: \left.\begin{array}{r} f'(x) < 0 \\ f(x) - 1 > 0 \\ f(x) - 2 > 0 \end{array}\right\} g'(x) < 0 \qquad \text{BC}: \left.\begin{array}{r} f'(x) < 0 \\ f(x) - 1 > 0 \\ f(x) - 2 < 0 \end{array}\right\} g'(x) > 0$$

$$\text{CN}: \left.\begin{array}{r} f'(x) < 0 \\ f(x) - 1 < 0 \\ f(x) - 2 < 0 \end{array}\right\} g'(x) < 0 \qquad \text{NY}: \left.\begin{array}{r} f'(x) > 0 \\ f(x) - 1 < 0 \\ f(x) - 2 < 0 \end{array}\right\} g'(x) > 0$$

Therefore, g(x) is increasing for $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup (1, \infty)$

D08/2/153. Let f(x) be continuous and strictly increasing function of x and suppose $F(x) = 1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3$. If F(x) has a positive root then :

(A) F(x) is a decreasing function of x
(B) $f(0) < -1$
(C) $|f(0)| < 1$
(D) $F(0) < 0$

माना f(x), x का एक निरन्तर वर्धमान फलन है तथा $F(x) = 1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3$. यदि F(x) धनात्मक मूल रखता है, तो :

(A) F(x), x का ह्यासमान फलन है
(B) $f(0) < -1$
(C) $|f(0)| < 1$
(D) $F(0) < 0$

Ans. BD

Sol. $F'(x) = f'(x)\,(1 + f(x) + 3(f(x))^2) > 0 \Rightarrow F(x)$ is increasing function

If F(x) has a positive root then $F(0) < 0$

$F(0) = (1 + f(0))\,(1 + (f(0))^2) < 0$

D08/2/154. The value of α for which $f(x) = \tan^{-1}\left(\alpha x - \frac{2x^2}{3} - 3\ln x\right)$ is monotonically decreasing for all $x \in (0, \infty)$ can be :

यदि $f(x) = \tan^{-1}\left(\alpha x - \frac{2x^2}{3} - 3\ln x\right)$, $x \in (0, \infty)$ में सभी x के लिए एकदिष्ट ह्यसमान है, तो α के मान हो सकते है :

(A) 4
(B) $2\sqrt{2}$
(C) $6\sqrt{2}$
(D) 2

Ans. ABD

Sol. $f(x) = \tan^{-1}\left(\alpha x - \frac{2x^2}{3} - 3\ln x\right)$

Let $g(x) = \alpha x - \frac{2x}{3} - 3\ln x$

For f(x) to be decreasing $g'(x) \le 0\ \forall\ x \in R$

$g'(x) = \alpha - \frac{4x}{3} - \frac{3}{x} \le 0 \Rightarrow \alpha \le \frac{4x}{3} + \frac{3}{x}$

$a \le 4$

D08/2/155. Consider $f(x) = \cos 2x\,(2\cos 2x + 3\sin x\cos x) + ax$, $a \in R$. The value(s) of 'a' for which f(x) is strictly increasing $\forall\ x \in R$ can be :

$f(x) = \cos 2x\,(2\cos 2x + 3\sin x\cos x) + ax$, $a \in R$ पर विचार कीजिए। 'a' का मान होगा/होंगे जिसके लिए x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए f(x) निरंतर वर्धमान हो :

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Ans. BCD

Sol. $f(x) = \cos 2x\,(2\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x) + ax$

$\Rightarrow \quad f(x) = (1 + \cos 4x) + \frac{3}{4}\sin 4x + ax$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 3\cos 4x - 4\sin 4x + a \ge 0\ \forall\ x \in R$

$\Rightarrow \quad a \ge 5$

D08/2/156. Consider twice derivable bijective function defined on [0, 1] such that $f(\alpha) = \frac{1}{3}$ and $f(f(\beta)) = \frac{1}{3}$. If $f''(x) < 0 \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ and $f''(x) < 0 \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ with $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Which the following holds good ?

(A) $\beta > \alpha$ implies f(x) is an increasing function

(B) $\beta > \alpha$ implies f(x) is an decreasing function

(C) $2f\left(\frac{1}{4}\right) < f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

(D) $2f\left(\frac{3}{4}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$

माना एक द्विअवकलनीय एकैकी आच्छादक फलन अन्तराल [0, 1] में इस प्रकार परिभाषित है कि $f(\alpha)=\frac{1}{3}$ तथा $f(f(\beta))=\frac{1}{3}$ यदि $f''(x)<0\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ तथा $f''(x)<0\forall x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ एवं $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ है।

निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य हैं ?

(A) $\beta > \alpha$ के लिए f(x) एक वर्धमान फलन है।

(B) $\beta > \alpha$ के लिए f(x) ह्यसमान फलन है।

(C) $2f\left(\frac{1}{4}\right)<f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

(D) $2f\left(\frac{3}{4}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)$

Ans. AC

Sol. $f(\alpha)=\frac{1}{3};f(f(\beta))=\frac{1}{3};f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(\beta)=\alpha$

Let $\beta > \alpha$

$\Rightarrow \beta > f(\beta)$

$\Rightarrow \frac{f(\beta)}{\beta}<1$

$\Rightarrow \alpha<\beta<\frac{1}{2}$

But $f(\alpha)<f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ f is increasing

Similarly $\beta<\alpha\Rightarrow$ f is decreasing

$$\frac{f\left(\frac{1}{4}\right)-f(0)}{\frac{1}{4}}<\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{1}{4}\right)<f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

D08/2/157. If $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$, then $|x|-|y|$ can be equal to :

यदि $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$, तब $|x|-|y|$ का मान हो सकता है :

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 4

Ans. BCD

Sol. $x^2 - 4y^2 = 4$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 = 1$$

$$\frac{|x|}{2} = \sqrt{1+y^2}$$

$$\therefore |x| = 2\sqrt{1+y^2} \Rightarrow |x| \geq 2 \qquad \ldots(1)$$

$\because$ $x + 2y > 0$ & $x - 2y > 0 \Rightarrow x > 0$. $\therefore$ $x \geq 2$

$$y^2 = \frac{x^2}{4} - 1$$

$$|y| = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$$

Let $f(x) = |x| - |y|$

$$f(x) = |x| - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = x - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \qquad (\because x \geq 2)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{2\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f'(x) < 0$ for $x \in \left(2, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(x) > 0$ for $x > \frac{4}{\sqrt{3}}$

$$\therefore f(x)_{min} = f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$$

$$\therefore f(x) \geq \sqrt{3} \forall x \in [2, \infty)$$

D08/2/158. Let $y = f(x)$ be a twice differentiable function in $[0, 2\pi]$ such that $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi^2$ and $f(2\pi) = 4\pi^2$ then which of the following is/are correct :

(A) The equation $f''(x)\, f'(x) - 2xf''(x) - 2f'(x) + 4x = 0$ has at least three distinct real roots in $[0, 2\pi]$

(B) $f(c).f'(c) - 2cf(c) - cf'(c) + 2c^2 = 0$ for some c in $(0, 2\pi)$

(C) $f''(x).f(x) - 2f(x) = 0 \ \forall \ x \in R$

(D) $f'(x).f(x) + 2x = 2x\ f(x) + f'(x)$ has at least two real roots in $(0, 2\pi)$

माना $y = f(x)$, $[0, 2\pi]$ में द्विअवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi^2$ तथा $f(2\pi) = 4\pi^2$ तब निम्न में से कौनसा/से सही होगा/होंगे :

(A) समीकरण $f''(x)\ f'(x) - 2xf''(x) - 2f'(x) + 4x = 0$, $[0, 2\pi]$ में कम से कम तीन भिन्न वास्तविक मूल रखती है।

(B) $(0, 2\pi)$ में किसी c के लिए $f(c).f'(c) - 2cf(c) - cf'(c) + 2c^2 = 0$

(C) $f''(x).f(x) - 2f(x) = 0 \ \forall \ x \in R$

(D) $f'(x).f(x) + 2x = 2x\ f(x) + f'(x)$, $(0, 2\pi)$ में कम से कम दो वास्तविक मूल रखती है

Ans. ABD

Sol. Consider the function

$g(x) = f(x) - x^2$

$g(0) = g(\pi) = g(2\pi) = 0$

$\Rightarrow f'(x) - 2x = 0$ has two real roots in $(0, 2\pi)$ and $f''(x) - 2 = 0$ has atleast one root in $(0, 2\pi)$

D08/2/159. Let $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ be a differentiable function such that $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ then :

(A) $f'(\alpha) = \sqrt{1 - f^2(\alpha)}$ for all $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(B) $f'(\alpha) = \frac{2}{\pi}$ for all $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $f(\alpha)\ f'(\alpha) = \frac{1}{\pi}$ for atleast one $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(D) $f'(\alpha) = \frac{8\alpha}{\pi^2}$ for atleast one $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

माना $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ तो :

(A) सभी $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिये $f'(\alpha) = \sqrt{1 - f^2(\alpha)}$

(B) सभी $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिये $f'(\alpha) = \frac{2}{\pi}$

(C) कम से कम एक $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिये $f(\alpha)\ f'(\alpha) = \frac{1}{\pi}$ है

(D) कम से कम एक $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिये $f'(\alpha) = \frac{8\alpha}{\pi^2}$ है

Ans. CD

Sol. For D option
Use Rolle's theorem
for C option use LMVT

D01/2/160 We say that a subset S of a finite set U is large if $|S| > |U \setminus S|$. Here $U \setminus S$ denotes the elements of U which are not in S and the notation $|T|$ denotes the number of elements in a set T. Let x be the number of large subsets of the set $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, and let y be the number of large subsets of $Y = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Which of the following is true?

हम कह सकते हैं कि परिमित समुच्चय U का उपसमुच्चय S बड़ा है यदि $|S| > |U \setminus S|$ है। यहाँ $U \setminus S$, U के उन अवयवों की संख्या को दर्शाता है जो S में नहीं हैं तथा $|T|$, समुच्चय T के अवयवों की संख्या को दर्शाता है। माना x, समुच्चय $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ के बड़े उपसमुच्चयों की संख्या है तथा माना y, $Y = \{1, 2, \ldots, 9\}$ के बड़े उपसमुच्चयों की संख्या है। निम्न में से कौनसा सत्य है?

(A) $x = 260, y = 256$ (B) $x = 386, y = 256$
(C) $x = 386, y = 130$ (D) $x = 512, y = 256$

Ans. B

Sol. When we choose a subset we can pair it with its complement. So the number of pairs of subsets is 2^9, since 210 is the number of subsets. From a pair we can always choose the larger one unless both have 5 elements.

So we get $x = 2^9 - \left(\frac{1}{2}\right)\binom{10}{5} = 386$, $y = 2^8 = 256$.

D01/2/161. 95% of the students in a class have taken Marketing, 80% have chosen Finance, 84% have chosen operations (ops), and 90% have chosen Human Resources (HR). Then, which of the following options is/are correct?

(A) Minimum percentage of people who have chosen all of the four is 49%

(B) Minimum percentage of people who have chosen all of the four is 50%

(C) Maximum percentage of people who have chosen all of the four is 84%

(D) Maximum percentage of people who have chosen all of the four is 80%

एक कक्षा में 95% विद्यार्थी विपणन, 80% वित्त, 84% परिचालन, तथा 90% मानव संसाधन को चुनते हैं। तो, निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/ हैं?

(A) चारों विषयों को चुनने वाले विद्यार्थियों का न्यूनतम प्रतिशत 49 है

(B) चारों विषयों को चुनने वाले विद्यार्थियों का न्यूनतम प्रतिशत 50 है

(C) चारों विषयों को चुनने वाले विद्यार्थियों का अधिकतम प्रतिशत 84 है

(D) चारों विषयों को चुनने वाले विद्यार्थियों का अधिकतम प्रतिशत 80 है

Ans. AD

Sol.

D01/2/162. Of 60 students in a class, anyone who has chosen to study maths elects to do physics as well. But no one does maths and chemistry, 16 do physics and chemistry. All the students do at least one of the three subjects and the number of people who do exactly one of the three is less than or equal to the number who do more than one of the three. Then which of the following options is/are correct?

(A) Maximum number of people doing chemistry only is 30.

(B) Minimum number of people doing Physics is 30.

(C) Minimum number of people doing Physics and Maths is 14.

(D) Maximum numbe of people not doing Maths is 44.

एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से, कोई भी विद्यार्थी जो गणित विषय का चुनाव करता है वह भौतिक विज्ञान विषय का भी चयन करता है। लेकिन कोई भी गणित तथा रसायन विज्ञान का चुनाव एक साथ नहीं करता है तथा 16 विद्यार्थी भौतिक तथा रसायन विज्ञान का चयन करते हैं। सभी विद्यार्थी कम से कम एक विषय का चयन करते हैं तथा उन विद्यार्थियों की संख्या जो तीनों विषयों में से कम से कम एक विषय का चयन करते हैं, उन विद्यार्थियों की संख्या तीनों विषयों में से एक से ज्यादा विषयों का चयन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या के बराबर या उससे कम है। तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) सिर्फ रसायन विज्ञान का चयन करने वाले विद्यार्थियों की अधिकतम संख्या 30 है

(B) भौतिक विज्ञान का चयन करने वाले विद्यार्थियों की न्यूनतम संख्या 30 है

(C) भौतिक विज्ञान तथा गणित का चयन करने वाले विद्यार्थियों की न्यूनतम संख्या 14 है

(D) गणित विषय का चुनाव नहीं करने वाले विद्यार्थियों की अधिकतम संख्या 44 है

Ans. ABC

Sol.

D07/2/163. Given that f(x) is a non-constant linear function. Then the curves :

(A) $y = f(x)$ and $y = f^{-1}(x)$ are orthogonal
(B) $y = f(x)$ and $y = f^{-1}(-x)$ are orthogonal
(C) $y = f(-x)$ and $y = f^{-1}(x)$ are orthogonal
(D) $y = f(-x)$ and $y = f^{-1}(-x)$ are orthogonal

दिया गया है कि f(x) एक चर रैखिक फलन है। तब वक्र :

(A) $y = f(x)$ तथा $y = f^{-1}(x)$ लाम्बिक हैं
(B) $y = f(x)$ तथा $y = f^{-1}(-x)$ लाम्बिक हैं
(C) $y = f(-x)$ तथा $y = f^{-1}(x)$ लाम्बिक हैं
(D) $y = f(-x)$ तथा $y = f^{-1}(-x)$ लाम्बिक हैं

Ans. BC

Sol. Let $y = ax + b = f(x)$ $\quad a \neq 0$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

(1) $m_1 = a,\ m_2 = \frac{1}{a}$ $\quad m_1m_2 = 1$

(2) $m_1 = a,\ m_2 = \frac{-1}{a}$ $\quad \Rightarrow m_1m_2 = -1$

(3) $m_1 = -a,\ m_2 = \frac{1}{a}$ $\quad \Rightarrow m_1m_2 = -1$

(4) $m_1 = -a,\ m_2 = \frac{-1}{a}$ $\quad \Rightarrow m_1m_2 = 1$

D07/2/164. If the line $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ touches the curve $4x^3 = 27ay^2$, then $\frac{P}{a} =$

यदि रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ वक्र $4x^3 = 27ay^2$ को स्पर्श करती है, तब $\frac{P}{a} =$

(A) $\cot^2\alpha \cos \alpha$ (B) $\cot^2 \alpha \sin \alpha$ (C) $\tan^2 \alpha \cos \alpha$ (D) $\tan^2 \alpha \sin \alpha$

Ans. A

Sol. Let $x = \frac{3at}{2^{\frac{2}{3}}}$, $y = at^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{9a^2t^2}{2^{\frac{4}{3}}}\right)}{9a^2t^{\frac{3}{2}}} = -\cot \alpha \Rightarrow \sqrt{t} = -2^{\frac{1}{3}} \cot \alpha$$

and $P = \cos\alpha\left(\frac{3at}{2^{\frac{2}{3}}} - \frac{at^{\frac{3}{2}}}{-\cot \alpha}\right)$

$$\Rightarrow \frac{P}{a} = \cos \alpha \ \cot^2 \alpha$$

D07/2/165. For the curve $C : y = e^{2x}\cos x$, which of the following statement(s) is/are true ?

(A) equation of the tangent where C crosses y-axis is $y = 3x + 1$

(B) equation of the tangent where C crosses y-axis is $y = 2x + 1$

(C) number of points in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ where tangent on the curve C is parallel to x-axis is 4

(D) number of points in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ where tangent on the curve C is parallel to x-axis is 2

वक्र C : $y = e^{2x}\cos x$ के लिये निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य होगा/होगें ?

(A) स्पर्श रेखा का समीकरण जहाँ C, y-अक्ष को काटता है, $y = 3x + 1$ होगा

(B) स्पर्श रेखा का समीकरण जहाँ C, y-अक्ष को काटता है, $y = 2x + 1$ होगा

(C) अन्तराल $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में उन बिन्दुओं की संख्या जहाँ वक्र C पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, 4 होगी

(D) अन्तराल $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में उन बिन्दुओं की संख्या जहाँ वक्र C पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, 2 होगी

Ans. BD

Sol. $y = e^{2x}.\cos x$

$y' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$

$y'(0) = 2;\quad y(0) = 1$

$y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$

Now $y' = 0 \Rightarrow 2\cos x = \sin x$

$\Rightarrow \tan x = 2$

$\therefore$ 2 solutions in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

D07/2/166. Consider the curve $x^3 + xy + y^3 = 3$ and line $x + y = k$ ($k \in R$). Which of the following statement(s) is/are correct :

(A) line is tangent to the curve if $k = 2$

(B) line is tangent to the curve if $k = 3$

(C) line meets the curve in two points if $2 < k < 3$

(D) line meets the curve in two point if $\frac{1}{3} < k < 2$

वक्र $x^3 + xy + y^3 = 3$ तथा रेखा $x + y = k$ ($k \in R$) पर विचार कीजिए। निम्नलिखित में कौनसा/से कथन सत्य होगा/होंगे :

(A) रेखा, वक्र की स्पर्शरेखा होगी यदि $k = 2$

(B) रेखा, वक्र की स्पर्शरेखा होगी यदि $k = 3$

(C) रेखा, वक्र को दो बिन्दुओं पर मिलती है यदि $2 < k < 3$

(D) रेखा, वक्र को दो बिन्दुओं पर मिलती है यदि $\frac{1}{3} < k < 2$

Ans. AD

Sol. $y = k - x$

$x^3 + x(k - x) + (k - x)^3 = 3$

$\Rightarrow (3k - 1)x^2 + (k - 3k^2)x + (k^3 - 3) = 0$

$D = k^2(1 - 3k)^2 - 4(3k - 1)(k^3 - 3) = -3k^4 - 2k^3 + k^2 + 36k - 12 = (k - 2)(3k - 1)(-k^2 - 3k - 6)$

D07/2/167. If a line is tangent to one point and normal at another point on the curve $x = 4t^2 + 3$, $y = 8t^3 - 1$, then slope of such a line is :

यदि एक रेखा वक्र $x = 4t^2 + 3$, $y = 8t^3 - 1$ पर एक बिन्दु पर स्पर्शरेखा तथा एक अन्य बिन्दु पर अभिलम्ब है, तब रेखा की प्रवणता/ढाल होगी/होंगी :

(A) -1 (B) 1 (C) $-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

Ans. CD

Sol. $\because x = 4t^2 + 3, y = 8t^3 - 1$ $\quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dt}{dy}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{24t^2}{8t} = 3t$

Let the tangent at $P(4t^2 + 3, 8t^3 - 1)$ be normal at $Q(t_1^2 + 3, 8t_1^3 - 1)$

$\therefore$ Equation of tangent at P is $y - (8t_1^3 - 1) = 3t(x - 4t^2 - 3)$ ...(i)

Eq. (i) passes through Q, then $8(t_1^3 - t^3) = 3t \,.\, 4(t_1^2 - t^2)$ or $(t_1 - t)^2 (t + 2t_1) = 0$

$\therefore t = -2t_1 \quad (\because t \neq t_1)$ ...(ii)

Given, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{at\ t} = \dfrac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{at\ t_1}} \Rightarrow 3t = -\dfrac{1}{3t_1} \quad \therefore tt_1 = -\dfrac{1}{9} \Rightarrow -2t_1^2 = -\dfrac{1}{9}$

$\therefore t_1 = \pm\dfrac{1}{3\sqrt{2}} \quad \therefore$ Slope of line $= -\dfrac{1}{3t_1} = \mp\sqrt{2}$

D07/2/168. For the curve $C : |x + y|^x = |x - y|^y$, which of the following statement(s) is/are true ?

(A) Tangent at (1,0) is parallel to normal at (0,–1)

(B) Subnormal and subtangent at (0,–1) are equal

(C) Lengths of tangent and normal at (0,–1) are NOT equal

(D) Tangents at (1,0) and (0,–1) are equally inclined to co-ordinate axes.

वक्र $C : |x + y|^x = |x - y|^y$ के लिये निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य होगा/होंगे ?

(A) (1,0) पर खींची गई स्पर्श रेखा (0,–1) पर खींचे गये अभिलम्ब के समान्तर है

(B) (0,–1) अधोलम्ब तथा अधोस्पर्शी की लम्बाईयाँ समान है

(C) (0,–1) पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब की लम्बाईयाँ समान नहीं है

(D) (1,0) तथा (0,–1) पर खींची गई स्पर्श रेखायें निदेर्शी अक्षों से समान झुकाव पर है

Ans. ABD

Sol. $|x + y|^x = |x - y|^y$

for (1, 0) C is $(x + y)^x = (x - y)^y$ $(\because\ x > y)$

$\Rightarrow x\ell n(x + y) = y\ell n(x - y)$

differentiating w.r.t. x, we get

$$\frac{x}{x+y}(1+y') + \ell n(x+y).1$$

$$= \frac{y}{x-y}(1-y') + \ell n(x-y).y'$$

put x = 1, y = 0

$\Rightarrow 1 + y' = 0 \Rightarrow y' = -1$

= slope of tangent at (1, 0)

for (0, –1) C is $(-x - y)^x = (x - y)^y$ $(\because\ x + y < 0)$

$\Rightarrow x\ell n(-x - y) = y\ell n(x - y)$

differentiating w.r.t. x, we get

$$\frac{x}{-x-y}(-1-y') + \ell n(-x-y).1$$

$$= \frac{y}{x-y}(1-y') + \ell n(x-y).y'$$

put x = 0, y = –1

$\Rightarrow 0 = -1\ (1 - y') \Rightarrow y' = 1$ = slope of tangent at (0, 1)

$\Rightarrow$ A and D are correct.

(B) Subnormal = $|y\,y'| = |-1.1| = 1$ at (0, –1)

subtangent = $\left|\frac{y}{y'}\right| = 1$ at (0, –1)

(C) Length of tangent = $|y \operatorname{cosec} \theta|$

$= \left|-1.\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ = length of normal at (0, –1)

T02/2/169. Let $x, y \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ such that tan x + cos y = 1 & cotx + siny = 2, then :

माना $x, y \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ इस प्रकार है कि tan x + cos y = 1 तथा cotx + siny = 2 है, तो :

(A) tanx + siny = 2 (B) cotx + cosy = 1

(C) tanx + tan2y = 1 (D) cotx + coty = 2

Ans. ABC

Sol. $\cos y = 1 - \tan x \Rightarrow -1 \le 1 - \tan x \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \tan x \le 2$

Similarly $\sin y = 2 - \cot x - 1 \le 2 - \cot x \le 1$

$1 \le \cot x \le 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \tan x \le 1$

$\because x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \tan x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

From (i) and (ii) (Let $\tan x = t$)

$\tan x = t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$

Now $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$(1-t)^2 + \left(2 - \frac{1}{t}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Rightarrow (t - 1)(t^3 - t^2 + 3t - 1) = 0$

$\Rightarrow t = 1$ and $t^3 - t^2 + 3t - 1 = 0$

$t^3 - t^2 + 3t - 1 = 0$ has no roots $\in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$

$\Rightarrow \tan x = 1$ and $\sin y = 1$

$\Rightarrow \tan x + \sin y = 2$

COMPREHENSION TYPE QUESTIONS

Paragraph for Question No. D05/3/170 & D05/3/171

Let $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{g(x)}$, where g(x) is a polynomial and

(i) f(x) is discontinuous at x = 1 & 2 only

(ii) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

On the basis of above information, answer the following questions :

माना $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+2x}{g(x)}$, जहाँ g(x) एक बहुपद है तथा

(i) $f(x)$, केवल x = 1 तथा 2 पर असंतत् है

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

D05/3/170. If $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exists finitely, then $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x$ is equal to :

यदि $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ परिमित रूप से विद्यमान है, तो $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x$ का मान होगा :

(A) 1 (B) e (C) e^2 (D) e^3

Ans. C

Sol. g(x) should be polynomial of degree three

$$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{(x-1)^2(x-2)} \text{ or } \frac{x^3-3x^2+2x}{(x-1)(x-2)^2}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exists

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}(f(x))^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^x=e^2$$

D05/3/171. If it is possible to make $f(x)$ continuous at x = 2, then $f(2)$ is equal to :

यदि $f(x)$ को x = 2 पर संतत् बनाना संभव हो, तो $f(2)$ का मान होगा :

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Ans. B

Sol. $$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x-2)}=2$$

Paragraph for Question D05/3/172 to D05/3/174

Let $g(x)=\dfrac{\sin^m x\ell n^n\left(x^2+x+1\right)}{x^p}$, where m,n,p are whole numbers if right hand derivative of $|\ell n\, x|$ at x = 1 is r and $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=r$.

On the basis of above information, answer the following questions :

माना $g(x)=\dfrac{\sin^m x\ell n^n\left(x^2+x+1\right)}{x^p}$ जहाँ m,n,p पूर्ण संख्याएँ है। $|\ell n\ x|$ का x = 1 पर दाँया अवकलज r तथा $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=r$ है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उतर दीजिए।

D05/3/172. The value of r is equal to :

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) does not exist

r का मान होगा :

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) विद्यमान नहीं है

Ans. A

Sol. $|\log x|=\begin{cases}\log x & x\ge 1\\ -\log x & x<1\end{cases}$ which is continuous function and right hand derivative $=\left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=1}=1$

$\Rightarrow$ r = 1 Ans. (A)

D05/3/173. Which of the following is necessarily true :

निम्न में से कौन सा आवश्यक रूप से सत्य होगा :

(A) m = p (B) m + n = p (C) n = 0 (D) m – p = n

Ans. B

Sol. $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)^m\left\{\log\left(x^2+x+1\right)\right\}^n}{x^p}=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^m \cdot \frac{x^m}{x^p}\left\{\frac{\log\left(1+x\left(x+1\right)\right)}{x\left(x+1\right)}\right\}^n \cdot \left\{x\left(x+1\right)\right\}^n = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^{m+n}}{x^p} = 1 \Rightarrow m+n=p \quad \text{Ans. (B)}$$

D05/3/174. If $\lim_{x\to\infty} g\left(x\right) = r$, then triplet (m,n,p) is :

यदि $\lim_{x\to\infty} g\left(x\right) = r$ हो, तो त्रिक् (m,n,p) होगा :

(A) (0,1,1) (B) (0,1,0) (C) (0,0,0) (D) (0,1,2)

Ans. C

Sol. If $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sin x\right)^m\left\{\log\left(x^2+x+1\right)\right\}^n}{x^{m+n}} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^m \cdot \left\{\frac{\log\left(x^2+x+1\right)}{x}\right\}^n = 1$$

$\Rightarrow mm^x = 0$, $n = 0$ and $p = 0$ $(p = m + n)$ Ans. (C)

Paragraph D05/3/175 to D05/3/176

Let $f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \tan\left(\ell n\left(\sec\frac{x}{n}\right)\right)$ and $g(x) = \min(f(x), \{x\})$

(where {.} denotes fractional part function)

माना $f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \tan\left(\ell n\left(\sec\frac{x}{n}\right)\right)$ तथा $g(x) = \min(f(x), \{x\})$

(जहाँ {.} भिन्नात्मक भाग फलन को दर्शाता है)

D05/3/175. Left hand derivative of $\phi\left(x\right) = e^{\sqrt{2f(x)}}$ at $x = 0$ is :

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) does not exist

$\phi(x) = e^{\sqrt{2f(x)}}$ का x = 0 पर बायाँ अवकलज है :

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) विद्यमान नहीं है

Ans. C

Sol.

D05/3/176. Number of points in $x \in [-1, 2]$ at which g(x) is discontinuous :

$x \in [-1, 2]$ में बिन्दुओं की संख्या जिन पर g(x) असतत् है :

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) 3

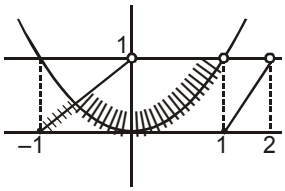
Ans. A

Sol.

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\, n^2 \frac{\tan\left(\ell n\left(\sec\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)}{\ell n\left(\sec\left(\frac{x}{n}\right)\right)} \times \frac{\left(\ell n\left(\sec\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)+1\right)}{\sec\left(\frac{x}{n}\right)-1} \times \frac{\sec\left(\frac{x}{n}\right)-1}{\left(\frac{x}{n}\right)^2} \times \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

g(x)



Paragraph D05/3/177 to D05/3/179

Let $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 + 2(x+1)^{2n}}{(x+1)^{2n+1} + x^2 + 1}, n \in N$ and

$g(x) = \tan\left(\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}\right)\right)$, then

माना $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 + 2(x+1)^{2n}}{(x+1)^{2n+1} + x^2 + 1}, n \in N$ तथा

$$g(x)=\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}\right)\right),$$ तब

D05/3/177. The number of points where g(x) is non differentiable $\forall\ x \in R$ is :

बिन्दुओं की संख्या जहाँ g(x) $\forall\ x \in R$ के लिए अन अवकलनीय है :

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Ans. A

Sol.

D05/3/178. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2+4x+3)}{\sin(x+3)g(x)}$ is equal to :

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2+4x+3)}{\sin(x+3)g(x)}$ बराबर है :

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Ans. C

Sol.

D05/3/179. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left\{\frac{f(x)}{\tan^2 x}\right\}+\left|\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)\right|+\lim\limits_{x\to -2^+}(5f(x))$ is equal to

(where {·} denote fraction part function) :

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left\{\frac{f(x)}{\tan^2 x}\right\}+\left|\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)\right|+\lim\limits_{x\to -2^+}(5f(x))$ बराबर है

(जहाँ {·} भिन्नात्मक भाग फलन को दर्शाता है) :

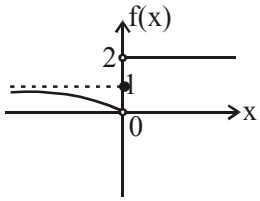
(A) 4 (B) 3 (C) 7 (D) 1

Ans. C

Sol. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ $x<0$

$=1$ $x=0$

$=2$ $x>0$



Paragraph for Question D02/3/180 to D02/3/181

Let $f:[a,c]\to[b,d], f(x)=x^2+4x-|x^2-4|$ is an onto function, where $a,b\in I$ & $c,d\in R$.

माना $f:[a,c]\to[b,d], f(x)=x^2+4x-|x^2-4|$ एक आच्छादक फलन है जहाँ $a,b\in I$ तथा $c,d\in R$ हैं।

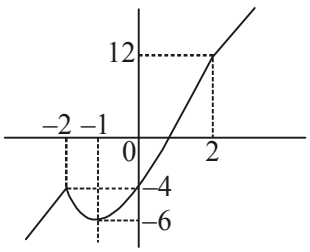
D02/3/180. If f(x) is bijective function and $c+d>0$, then minimum value of $a+b$ is :

यदि f(x) एकैकी–आच्छादक फलन है तथा $c+d>0$, तो $a+b$ का न्यूनतम मान होगा :

(A) –4 (B) –5 (C) –6 (D) –7

Ans. D

Sol.



$$f(x)=\begin{cases}4x+4 & x\in[-\infty,-2]\cup[2,\infty)\\ 2x^2+4x-4 & x\in(-2,2)\end{cases}$$

As $c+d>0$ f(x) is bijective for $x\ge -1$ and range of f(x) is $[-6,\infty)$

$\Rightarrow$ Minimum value of $a+b$ is –7

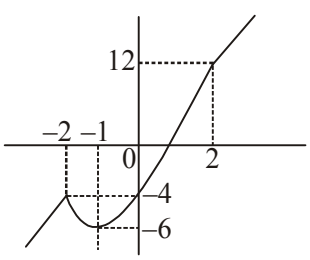
D02/3/181. If $f(k+x)=f(k-x)$ for some $k\in R$, then value $a+b+c+d$ is :

किसी $k\in R$ के लिए यदि $f(k+x)=f(k-x)$ है, तो $a+b+c+d$ का मान है :

(A) –12 (B) –9 (C) –10 (D) –11

Ans. A

Sol.



$$f(x)=\begin{cases}4x+4 & x\in[-\infty,-2]\cup[2,\infty)\\ 2x^2+4x-4 & x\in(-2,2)\end{cases}$$

Aa $c+d>0$ f(x) is bijective for $x\ge -1$ and range of f(x) is $[-6,\infty)$

f(x) is symmetric about $x = -1$ for $x \in [-2, 0]$ and its range is $[-6, -4] \Rightarrow a + b + c + d = -12$

Paragraph for Question D02/3/182 to D02/3/183

Let $f(x) = 2 - |x - 3|$, $1 \le x \le 5$ and for rest of the values f(x) can be obtained by using the relation $f(5x) = \alpha f(x)\ \forall\ x \in R$.

मान लीजिए $f(x) = 2 - |x - 3|$, $1 \le x \le 5$ तथा शेष मानों के लिए f(x) को संबंध $f(5x) = \alpha f(x)\ \forall\ x \in R$ का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

D02/3/182. The maximum value of f(x) in $[5^4, 5^5]$ for $\alpha = 2$ is :

$[5^4, 5^5]$ में $\alpha = 2$ के लिए f(x) का अधिकतम मान है :

(A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 8

Ans. B

Sol. (B) For $x \in [5^4, 5^6]$

$$f(x) = \alpha^4\left[2 - \left|\frac{x}{5^4} - 3\right|\right]$$

$\alpha = 2$

$f(x)_{max} = 32$

D02/3/183. The value of f(2007), taking $\alpha = 5$, is :

$\alpha = 5$ के लिए f(2007) का मान है :

(A) 1118 (B) 2007 (C) 1250 (D) 132

Ans. A

Sol. (A) $\alpha = 5$

$$f(x) = 5^4\left[2 - \left|\frac{x}{5^4} - 3\right|\right]$$

$$f(2007) = 5^4\left[2 - \frac{2007}{625} + 3\right] = 1118$$

Paragraph for Question D02/3/184 to D02/3/185

An even periodic function $f : R \to R$ with period 4 is such that $f(x) = \begin{cases} \max.(|x|, x^2) & ; \quad 0 \le x < 1 \\ x & ; \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

एक सम आवर्ती फलन $f : R \to R$ जिसका आवर्तकाल 4 है, इस प्रकार है कि $f(x) = \begin{cases} \max.(|x|, x^2) & ; \quad 0 \le x < 1 \\ x & ; \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

D02/3/184. The value of {f(5.12)} (where {·} denotes fractional part function), is :

{f(5.12)} का मान होगा (जहाँ {·} भिन्नात्मक भाग फलन को दर्शाता है) :

(A) {f(3.26)} (B) {f(7.88)} (C) {f(2.12)} (D) {f(5.88)}

Ans. B

Sol.

$$f(x) \begin{cases} \to x & 0 \le x \le 2 \\ \to -x & -2 \le x \le 0 \end{cases}$$

$f(x) = f(x+4)$

$\{f(5.12)\} = \{f(1.12)\} = 0.12$

$\{f(7.88)\} = \{f(3.88)\} = \{f(-0.12)\} = 0.12$

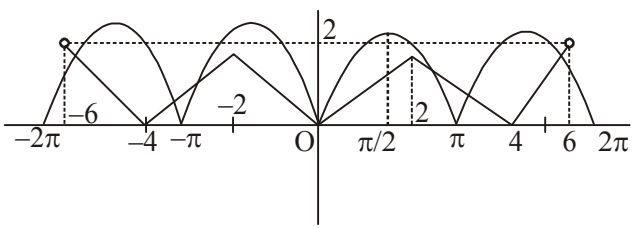
D02/3/185. The number of solution of $f(x) = |3 \sin x|$ for $x \in (-6, 6)$:

$x \in (-6, 6)$ में $f(x) = |3 \sin x|$ के हलों की संख्या होगी :

(A) 5 (B) 3 (C) 7 (D) 9

Ans. C

Sol.



Paragraph for question (D03/3/186-D03/3/187)

$ax + b(\sec(\tan^{-1} x)) = c$ and $ay + b(\sec(\tan^{-1} y)) = c$

$ax + b(\sec(\tan^{-1} x)) = c$ तथा $ay + b(\sec(\tan^{-1} y)) = c$

D03/3/186. The value of xy is :

(A) $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ (B) $\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}$ (C) $\frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (D) none of these

xy का मान होगा :

(A) $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ (B) $\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}$ (C) $\frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. B

Sol.

D03/3/187. The value of x + y is :

(A) $\frac{2ac}{a^2-b^2}$ (B) $\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$ (C) $\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$ (D) None of these

x + y का मान होगा :

(A) $\frac{2ac}{a^2-b^2}$ (B) $\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$ (C) $\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. A

Sol. Given $ax + b(\sec(\tan^{-1} x)) = c$ and

$ay + b(\sec(\tan^{-1} y)) = c$

Let $\tan^{-1} x = \alpha$ and $\tan^{-1} y = \beta$ then the given relations are

$a \tan \alpha + b \sec \alpha = c$ and

$a \tan \beta + b \sec \alpha = c$

From these two relations, we can conclude that equation

$a \tan \theta + b \sec\theta\ c$ has roots α and β.

$a \tan \theta + b \sec \theta = c$

$\Rightarrow b \sec \theta = c - a \tan \theta$

$\Rightarrow b^2 \sec^2 \theta = c^2 - 2\,ac \tan \theta + a^2 \tan^2 \theta$

$\Rightarrow b^2 + b^2 \tan^2 \theta = c^2 - 2ac \tan \theta + a^2 \tan\theta$

$\Rightarrow (a^2 - b^2) \tan^2 \theta - 2ac \tan \theta + c^2 - b^2 = 0$

$\Rightarrow$ Sum of the roots,

$$\tan\alpha + \tan \beta = x + y = \frac{2ac}{a^2-b^2}$$

and the product of roots, $\tan \alpha \tan \beta = \frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$ and

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\frac{2ac}{a^2-b^2}}{1-\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}} = \frac{2ac}{a^2-c^2}$$

Paragraph (D04/3/188 to D04/3/189)

Consider $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$; such that f(x) is bijective and satisfies $f(x)e^{f(x)} = x$.

On the basis of above information, answer the following questions :

$f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ पर विचार करें जो कि एकैकी आच्छादक फलन है और $f(x)e^{f(x)} = x$ को संतुष्ट करता है।

ऊपर दी गई सूचना के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

D04/3/188. The greatest integer less than or equal to the value of $f\left(f\left(e^{(e+1)}\right)\right)$, is :

वह महत्तम पूर्णांक जिसका मान $f\left(f\left(e^{(e+1)}\right)\right)$ से कम या बराबर है, है :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Ans. B

Sol. $f^{-1}(x) = g(x)$ (say) $\Rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$

clearly, $g(e) = e^{(e+1)} \Rightarrow g^{-1}(e^{(e+1)}) = e$

$\Rightarrow f(e^{(e+1)}) = e \Rightarrow f(f(e^{(e+1)})) = f(e)$

$= g^{-1}(e) = 1$

Now, $ye^y = x$; $y = f(x)$

So, $\ell ny + y = \ell nx \Rightarrow \frac{y'}{y} + y' = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{y}{x(y+1)}$

$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ell nx} = \lim_{x\to\infty} xf'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1} = 1$

(as $f(x) \to \infty$ when $x \to \infty$)

D04/3/189. The value of $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ell nx}$, is :

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) non-existent

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ell nx}$ का मान है :

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) अनिर्धारित

Ans. B

Sol. $f^{-1}(x) = g(x)$ (say) $\Rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$

clearly, $g(e) = e^{(e+1)} \Rightarrow g^{-1}(e^{(e+1)}) = e$

$\Rightarrow f(e^{(e+1)}) = e \Rightarrow f(f(e^{(e+1)})) = f(e)$

$= g^{-1}(e) = 1$

Now, $ye^y = x$; $y = f(x)$

So, $\ell ny + y = \ell nx \Rightarrow \frac{y'}{y} + y' = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{y}{x(y+1)}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ell nx} = \lim_{x\to\infty} xf'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1} = 1$$

(as $f(x) \to \infty$ when $x \to \infty$)

Paragraph for Question Nos. D04/3/190 to D04/3/191

Let $f(x) = \log_2(x^2 + 5x) - 2\log_2(ax + 1)$ where $a > 0$

and $g(x) = \begin{cases} 3(\cos^{2m} x) - 1, & x < 0 \text{ and } m \to \infty \\ -\sin^{2n} x, & x \geq 0 \text{ and } n \to \infty \end{cases}$

माना $f(x) = \log_2(x^2 + 5x) - 2\log_2(ax + 1)$ जहाँ $a > 0$

तथा $g(x) = \begin{cases} 3(\cos^{2m} x) - 1, & x < 0 \text{ and } m \to \infty \\ -\sin^{2n} x, & x \geq 0 \text{ and } n \to \infty \end{cases}$

D04/3/190. If $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)+2) = 0$, then a equals :

यदि $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)+2) = 0$ है, तो a का मान होगा :

(A) 2 (B) 4 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Ans. A

Sol. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \log_2\left(\frac{x^2+5x}{(ax+1)^2}\right) = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \log_2\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\right) = -2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{a^2}\right) = -2 \Rightarrow -2\log_2 a = -2$$

D04/3/191. Which one of the following is true for function g(x) ?

(A) $g(0^+) \neq g(0)$ (B) $g(0^-) = g(0)$ (C) $g(0^-) \neq g(0^+)$ (D) g is continuous at x=0

फलन g(x) के लिए निम्न में से कौनसा सत्य होगा ?

(A) $g(0^+) \neq g(0)$ (B) $g(0^-) = g(0)$ (C) $g(0^-) \neq g(0^+)$ (D) x = 0 पर g संतत् है

Ans. C

Sol. $g(0^+) = 0$, $g(0) = 0$ and $g(0) = -1$

$\Rightarrow$ g(x) is discontinuous at x = 0

$\therefore g(0) \neq g(0^+)$

Paragraph for Question Nos. D04/3/192 to D04/3/193

Consider the functions $f(x) = 2x + 1$ & $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

$$f_n(x) = \underbrace{f\left(f\left(f.....\left(f(x)\right).....\right)\right)}_{\text{n times}} \text{ and } g_n(x) = \underbrace{g\left(g\left(g.....\left(g(x)\right).....\right)\right)}_{\text{n times}}$$

f(x) = 2x + 1 तथा $g(x) = \frac{1}{1-x}$ पर विचार करें।

$$f_n(x) = \underbrace{f\left(f\left(f.....\left(f(x)\right).....\right)\right)}_{\text{n times}} \text{ तथा } g_n(x) = \underbrace{g\left(g\left(g.....\left(g(x)\right).....\right)\right)}_{\text{n times}}$$

D04/3/192. $f_6(1) + g_6(1)$ has :

(A) Exactly 1 prime divisor (B) Exactly 7 composite divisors

(C) Exactly 6 composite divisors (D) None of these

$f_6(1) + g_6(1)$ का :

(A) ठीक 1 अभाज्य भाजक (B) ठीक 7 समग्र विभाजक

(C) ठीक 6 समग्र विभाजक (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. D

Sol.

D04/3/193. $\ell = \lim_{x \to -1} \frac{f_6(x) - g_6(x)}{x+1}$, then $\sqrt{\ell + 1}$ is :

(A) a prime number (B) a composite number

(C) divisible by two (D) Divisible by four

$\ell = \lim_{x \to -1} \frac{f_6(x) - g_6(x)}{x+1}$, तो $\sqrt{\ell+1}$ है :

(A) एक अभाज्य संख्या (B) समग्र संख्या

(C) 2 से विभाज्य (D) 4 से विभाज्य

Ans. BCD

Sol. $f(x) = 2x + 1$

$f(f(x)) = 2(2x + 1) + 1$

$= 2^2x + 3 = 2^2x + 2^2 - 1$

$f(f(f(x))) = 2^2(2x + 1) + 3$

$= 2^3x + 7 = 2^3x + 2^3 - 1$

$\Rightarrow f_n(x) = 2^nx + 2^n - 1$

$g(x) = \frac{1}{1-x}$, then $g(g(x)) = 1 - \frac{1}{x}$

$g(g(g(x))) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - (1 - x) = x$

$g_3(x) = x$

Similarly $g_6(x) = x$

$f_6(1) + g_6(1) = 64 + 63 + 1$

$= 128 \Rightarrow 2^7$

$\lim_{x \to -1} \frac{f_6(x) - g_6(x)}{x+1}$

$\lim_{x \to -1} \frac{64x + 63 - x}{x+1} = \frac{63(x+1)}{x+1} = 63 = \ell$

$\sqrt{\ell+1} = 8$

Paragraph for Question D09/3/194 to D09/3/195

Consider the function $f(x) = b\ell nx - x$ on the interval $(0,\infty)$ where b is positive real constant.

On the basis of above information, answer the following questions :

माना फलन $f(x) = b\ell nx - x$, अन्तराल $(0,\infty)$ पर परिभाषित है, जहाँ b धनात्मक वास्तविक अचर है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

D09/3/194. If the line $x - y = 0$ is tangent to $f(x) = b\ell nx - x$, then b lies in the interval :

यदि रेखा $x - y = 0$, $f(x) = b\ell nx - x$ पर स्पर्श रेखा हो, तो b निम्न अन्तराल में स्थित होगा :

(A) (1,3) (B) (0,1) (C) (4,6) (D) (6,8)

Ans. C

Sol. Let 'α' be the point of intersection of line & curve.

$\Rightarrow \quad \alpha = b\,\ell n\alpha - \alpha$

$\Rightarrow \quad b\,\ell n\alpha - 2\alpha = 0 \qquad ...(1)$

Let $f(\alpha) = b\,\ell n\alpha - 2\alpha$

$$f'(\alpha) = \frac{b}{\alpha} - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{b}{2}$$

from (1) $b = 2e$

D09/3/195. Which of the following statement holds good ?

(A) The function $f(x)$ has an extremum point at $x = b$

(B) The function $f(x)$ has an inflection point

(C) The function $f(x)$ is strictly decreasing on $(0,\infty)$

(D) The function $f(x)$ is strictly increasing on $(0,\infty)$

निम्न में से कौनसा कथन सत्य होगा ?

(A) फलन $f(x)$ का $x = b$ पर चरम बिन्दु होगा

(B) फलन $f(x)$ का नति परिवर्तन बिन्दु होगा

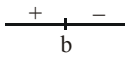
(C) फलन $f(x)$ अन्तराल $(0,\infty)$ पर निरन्तर ह्रासमान होगा

(D) फलन $f(x)$ अन्तराल $(0,\infty)$ पर निरन्तर वर्धमान होगा

Ans. A

Sol. $f(x) = b\,\ell nx - x$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{b}{x} - 1 = 0$$



$\Rightarrow \quad x = b$

$\Rightarrow \quad x = b$ is point of extremum

Paragraph for Question D09/3/196 to D09/3/197

Let f(x) be a cubic polynomial which has local maxima at $x = 2$ and $f'(x)$ has a local minima at $x = 4$. If $f(2) = 12$ and $f(4) = 4$.

मान लीजिए f(x) एक त्रिघाती बहुपद है जिसका स्थानीय उच्चिष्ठ $x = 2$ पर है तथा $f'(x)$ का स्थानीय निम्निष्ठ $x = 4$ पर है। यदि $f(2) = 12$ तथा $f(4) = 4$ है।

D09/3/196. The minimum value of f(x) in [1, 6] is :

[1, 6] में f(x) का न्यूनतम मान है :

(A) –4 (B) 1 (C) 4 (D) 12

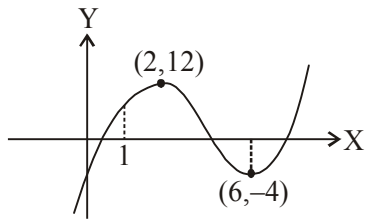
Ans. A

Sol. $f''(x) = \lambda(x-4)$

$$f'(x) = \lambda\left(\frac{x^2}{2} - 4x\right) + \mu$$

$f'(2) = 0$ give, $\mu = 6\lambda$

$$f'(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 - 4\lambda x + 6\lambda$$



$$f(x) = \frac{\lambda}{6}x^3 - 2\lambda x^2 + 6\lambda x + k$$

$\because f(2) = 12$ & $f(4) = 4$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 18x - 4$$

$f(2) = 12$, $f(6) = -4$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 18x - 4$$

as $f(4-t) + f(4+t) = 8 \Rightarrow G'(t) = 8$

$\Rightarrow G(t)$ is an increasing function

D09/3/197. Let $G(t) = \int_{4-t}^{4+t} f(x)dx, t \in R$, then G(t) is :

(A) increasing function
(B) decreasing function
(C) neither increasing nor decreasing function
(D) constant for $\forall\, t \in R$

माना $G(t) = \int_{4-t}^{4+t} f(x)dx, t \in R$, तब G(t) होगा :

(A) वर्धमान फलन
(B) ह्रासमान फलन
(C) ना तो वर्धमान और ना ही ह्रासमान
(D) $\forall\, t \in R$ के लिए अचर

Ans. A

Sol. $f''(x) = \lambda(x-4)$

$$f'(x) = \lambda\left(\frac{x^2}{2} - 4x\right) + \mu$$

$f'(2) = 0$ give, $\mu = 6\lambda$

$$f'(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 - 4\lambda x + 6\lambda$$

$$f(x) = \frac{\lambda}{6}x^3 - 2\lambda x^2 + 6\lambda x + k$$

$\because$ f(2) = 12 & f(4) = 4

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 18x - 4$$

f(2) = 12, f(6) = –4

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 18x - 4$$

as f(4 – t) + f(4 + t) = 8 $\Rightarrow$ G′(t) = 8

$\Rightarrow$ G(t) is an increasing function

Paragraph for Question D09/3/198 to D09/3/200

Let f(x) is a cubic polynomial with leading coefficient unity such that f(a) = b & f'(a) = f''(a) = 0. Let ϕ(x) = f(x) – f(a) + (a – x) f'(x) + 3(x – a)^2 for which conclusion of Rolle's theorem in [a,b] holds at x = 2 {a < 2 < b}.

On the basis of above information, answer the following questions :

माना घन बहुपद f(x) जिसका मुख्य गुणांक इकाई है इस प्रकार है कि f(a) = b तथा f'(a) = f''(a) = 0 है। माना ϕ(x) = f(x) – f(a) + (a – x) f'(x) + 3(x – a)^2 जिसके लिये अन्तराल [a,b] में रोले प्रमेय, x = 2 पर सत्यापित होती है। {a < 2 < b}.

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उतर दीजिए :

D09/3/198. f''(2) is equal to :

f''(2) का मान होगा :

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

Ans. D

Sol. f(x) = (x – a)^3 + b

$\because$ Rolle's theorem is applicable to ϕ(x) at x = 2

$\therefore$ ϕ(a) = ϕ(b) & ϕ'(2) = 0

$\Rightarrow$ 0 = f(b) – f(a) + (a – b) f′(b) + 3(b – a)^2

& (a – 2) f″(2) + 6(2 – a) = 0

$$\Rightarrow f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + 3(b - a) \quad f''(2) = 6$$

D09/3/199. f'(b) is equal to :

f'(b) का मान होगा :

(A) 2 (B) 4 (C) $\frac{27}{4}$ (D) $\frac{11}{4}$

Ans. C

Sol. $f''(2) = 6 \Rightarrow 6(2-a) = 6 \Rightarrow a = 1$

$$f'(b) = \frac{(b-a)^3}{b-a} + 3(b-a)\left\{\because f(x) = (x-a)^3 + b\right\}$$

$\Rightarrow 3(b-a)^2 = (b-a)^2 + 3(b-a)$

$2(b-a)^2 = 3(b-a)$

$$b - a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{5}{2}$$

D09/3/200. Maximum value of $\phi(x)$ in [a,b] is :

अन्तराल [a,b] में $\phi(x)$ का अधिकतम मान होगा :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) a + b

Ans. B

Sol. Now $\phi(x) = (x-a)^3 + (a-x)^3 (x-a)^2 + 3(x-a)^2$

$\Rightarrow \phi(x) = (x-a)^2 (-2x + 2a + 3)$

$\phi(x) = (x-1)^2 (5-2x)$

max exist at $x = 2 \Rightarrow \phi(2) = 1$

Paragraph for Question D09/3/201 to D09/3/202

Let $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2 & ; \quad x > 0 \\ \lambda - x^4 & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ & f(x) is discontinous at x = 0.

On the basis of above information, answer the following questions :

माना $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2 & ; \quad x > 0 \\ \lambda - x^4 & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$, x = 0 पर असंतत् है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उतर दीजिए :

D09/3/201. The value of λ for which $f(x)$ is odd, is :

λ का मान जिसके लिए $f(x)$ विषम फलन हो, होगा :

(A) 0 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

Ans. D

Sol. $f(x) = -f(-x)$ for all x in domain

$x^4 - 2 = x^4 - \lambda \Rightarrow \lambda = 2$

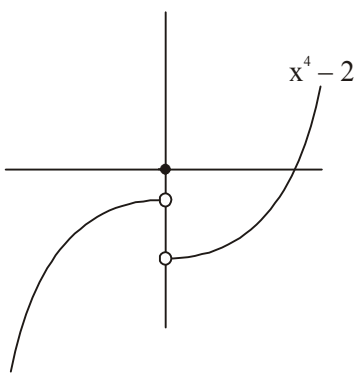
D09/3/202. The set of values of λ for which $f(x)$ is having local maxima at $x = 0$ is :

λ के मानों का समुच्चय जिसके लिये $f(x)$ का $x = 0$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ हो, होगा :

(A) $(0,\infty)$ (B) $(-\infty,0)$ (C) $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ (D) ϕ

Ans. B

Sol.



$\lambda < 0$

Paragraph for Question D09/3/203 to D09/3/205

Let $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$ and $g(x) = x^2 + 2x - 3$

माना $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$ तथा $g(x) = x^2 + 2x - 3$

D09/3/203. The set of all the values of x for which $f'(x) < g'(x)$ is :

x के सभी मानों का समुच्चय जिसके लिए $f'(x) < g'(x)$ है :

(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, -1)$ (C) $(4, \infty)$ (D) $(-1, 4)$

Ans. D

Sol. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$

$f'(x) = x^2 - x - 2$

$g(x) = x^2 + 2x - 3$

$g'(x) = 2x + 2$

$x' - x - 2 < 2x + 2$

$x' - 3x - 4 < 0$

$(x - 4)(x + 1) < 0$

D09/3/204. Let the roots of $f'(x) = 0$ are x_1 and x_2 then $g(x_1) + g(x_2)$ is equal to :

मान लें कि $f'(x) = 0$ के मूल x_1 तथा x_2 हैं तो $g(x_1) + g(x_2)$ बराबर है :

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 9

Ans. C

Sol. $f'(x) = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2, -1$

$g(x_1) + g(x_2)$

$4 + 4 - 3 + 1 - 2 - 3 = 1$

D09/3/205. The absolute difference between the maximum and minimum values of g(x) in the interval [0, 2] is :

[0, 2] में g(x) के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों के बीच पूर्ण अंतर है :

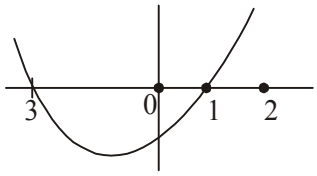
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) –8

Ans. C

Sol. $g(x) = x^2 + 2x - 3$

$(x + 3)(1 - 1)$

$g(2) - g(0) = 8$



Paragraph for Question D09/3/206 to D09/3/207

Let f be a real valued function on R defined by $f(x) = xe^{-x}$. Suppose a line parallel to the x-axis has distinct intersection points P,Q with the curve $y = f(x)$. Denote the length of the line segment PQ equal to L. Also β is the value of x for which $y = f(x)$ has a local maximum and R be the intersection point of the line $x = \beta$ and the line PQ.

माना f, R में वास्तविक मान फलन है जो $f(x) = xe^{-x}$ द्वारा परिभाषित है। माना एक x-अक्ष के समान्तर रेखा वक्र $y = f(x)$ को भिन्न बिन्दुओं P, Q पर प्रतिच्छेद करती है। L, रेखाखण्ड AB की लम्बाई को प्रदर्शीत करता है तथा β, x का वह मान जहाँ $y = f(x)$ स्थानिय निम्निष्ठ रखता है तथा रेखा $x = \beta$ तथा रेखा PQ का प्रतिच्छेदन बिन्दु R है।

D09/3/206. If p and q are the abscissa's of the point P and Q respectively, then the ordered pair (p, q) is :

P तथा Q के भुज क्रमशः p तथा q है, तो (p, q) क्रमित युग्म होगा :

(A) $\left(\frac{L}{e^L-1}, \frac{e^L}{e^L-1}\right)$ (B) $\left(\frac{L}{e^L-1}, \frac{Le^L}{e^L+1}\right)$ (C) $\left(\frac{e^L}{e^L-1}, \frac{L}{e^L-1}\right)$ (D) $\left(\frac{L}{e^L-1}, \frac{Le^L}{e^L-1}\right)$

Ans. D

Sol.

D09/3/207. If α denotes the x-coordinate of the point of inflection, then $(\alpha - \beta)$ equals :

यदि α किसी नति परिवर्तन बिन्दु के x-निर्देशांक को दर्शाता है, तो $(\alpha - \beta)$ का मान होगा :

(A) e – 1 (B) 1 (C) 2 (D) e – 2

Ans. B

Sol. $f(x) = xe^{-x}$

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$

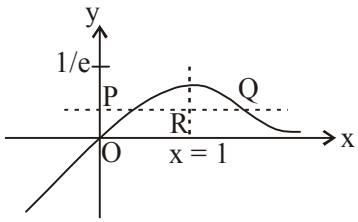
$f''(x) = (x-2)e^{-x}$

$\beta = 1 \quad \alpha = 2$

Let co-ordinate of point $P(p, pe^{-p})$, $Q(q , qe^{-q})$

$q - p = L$ and $pe^{-p} = qe^{-q}$

$\Rightarrow p = \frac{L}{e^L-1}$ $\quad q = p + L = \frac{Le^L}{e^L-1}$



Paragraph for Question D09/3/208 to D09/3/209

If a, b, c > 0 are such that a + b + c = 3 and two positive numbers m, n ≠ 1 are such that max $(a^m + b^m + c^m) = 3$ and min $(a^n + b^n + c^n) = 3$ and a function $f(x) = x^2 + px + q$ is such that f(x) = 0 has m, n as its roots, then

यदि a, b, c > 0 इस प्रकार हैं कि a + b + c = 3 तथा दो धनात्मक संख्याएँ m, n ≠ 1 इस प्रकार हैं कि $(a^m + b^m + c^m) = 3$ का अधिकतम तथा $(a^n + b^n + c^n) = 3$ का न्यूनतम और एक फलन $f(x) = x^2 + px + q$ इस प्रकार है कि f(x) = 0 के दो मूल m तथा n हैं, तब

D09/3/208. Which is correct ?

(A) (p + q + 1) p < 0 (B) (p + q + 1) p > 0 (C) (p + q + 1) p = 0 (D) Data insufficient

कौनसा सत्य है ?

(A) (p + q + 1) p < 0 (B) (p + q + 1) p > 0 (C) (p + q + 1) p = 0 (D) तथ्य अपर्याप्त हैं

Ans. B

Sol. $\because$ m, n > 0 are roots of $f(x) = x^2 + px + q = 0$

$\Rightarrow$ sum of roots $m + n = -p > 0 \Rightarrow p < 0$

also max $(a^m + b^m + c^m) = 3$, min $(a^n + b^n + c^n) = 3$ and m, n ≠ 1

$\Rightarrow$ 1 lies between m and n.

$\Rightarrow$ $f(1) < 0 \Rightarrow 1 + p + q < 0$

$\therefore \quad p(1 + p + q) > 0$

D09/3/209. If a, b, c are not all equal and $\alpha > 0$ such that $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = 3$ and $f'(\alpha) = 0$, then :

यदि a, b, c सभी बराबर नहीं है तथा $\alpha > 0$ इस प्रकार है कि $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = 3$ तथा $f'(\alpha) = 0$ है, तो :

(A) $n = 2 - m$ (B) $n = 1 - m$ (C) $n = 4 - m$ (D) $n = m$

Ans. A

Sol. $\because \quad \alpha > 0$ and for $a \neq b \neq c$, $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = 3$

$\Rightarrow \quad \alpha = 1$

$\therefore \quad f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha + p = 0 \Rightarrow 2-(m + n) = 0$

$\Rightarrow \quad n = 2 - m$

Paragraph for Question D06/3/210 to D06/3/211

Let $\phi(x)$, $h(x)$ & $g(x)$ be differentiable functions.

$\phi'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $\phi(1) = 1$; $h(x) = e^{x^2}$ and $f(x) = h(x).\phi(x) \quad \forall x \geq 1$

Let $g(x)$ be inverse of $f(x)$.

On the basis of above information, answer the following questions

माना $\phi(x)$, $h(x)$ तथा $g(x)$ अवकलनीय फलन है।

$\phi'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $\phi(1) = 1$; $h(x) = e^{x^2}$ तथा $f(x) = h(x).\phi(x) \quad \forall x \geq 1$ है। माना $g(x)$, $f(x)$ का व्युत्क्रम है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

D06/3/210. $f(2)$ is equal to :

$f(2)$ का मान होगा :

(A) $e^4(2 + \ell n2)$ (B) $e^4(4 + \ell n2)$ (C) $e^4(2 + \ell n4)$ (D) $e^4(4 + \ell n4)$

Ans. A

Sol. $\phi(x) = x + \ell nx + c$

$\Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow f(x) = e^{x^2}.(x + \ell nx)$

D06/3/211. $g'(e)$ is equal to :

$g'(e)$ का मान होगा :

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{2e}$ (C) $\frac{1}{3e}$ (D) $\frac{1}{4e}$

Ans. D

Sol. $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

put x = 1

$\Rightarrow g'(e) = \frac{1}{4e}$

Paragraph for Question D06/3/212 to D06/3/213

Consider two real-valued functions defined on R (the set of all real numbers) as $f(x) = \tan^{-1}|x-1|$ and $g(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

माना R (सभी वास्तविक मानों का समुच्चय है) पर दो वास्तविक मान फलन $f(x) = \tan^{-1}|x-1|$ तथा $g(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ परिभाषित है।

D06/3/212. The derivative of f(x) with respect to g(x) when x = 1, is equal to :

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) non-existent

x = 1 पर f(x) का g(x) के सापेक्ष अवकलन का मान होगा :

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) विद्यमान नहीं है

Ans. D

Sol. We have $f(x) = \tan^{-1}|x-1|$

$$= \begin{cases} \tan^{-1}(1-x); & x < 1 \\ \tan^{-1}(x-1); & x \geq 1 \end{cases}$$

Clearly, f(x) is non derivable at x = 1 as
$f'(1^-) = -1$ and $f'(1^+) = 1$

Also, $g(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \begin{cases} \pi + 2\tan^{-1} x; & x < 0 \\ \pi - 2\tan^{-1} x; & x \geq 0 \end{cases}$$

As f(x) is non-derivable at x = 1, so derivative of f(x) with respect to g(x), when x = 1 is non-existent

D06/3/213. The value of $\frac{d^2g}{dx^2}$ when $x = -1$, is equal to :

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) non-existent

$x = -1$ पर $\frac{d^2g}{dx^2}$ का मान होगा :

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) विद्यमान नहीं है

Ans. C

Sol. We have $f(x) = \tan^{-1}|x - 1|$

$$= \begin{cases} \tan^{-1}(1-x); & x < 1 \\ \tan^{-1}(x-1); & x \geq 1 \end{cases}$$

Clearly, f(x) is non derivable at x = 1 as

$f'(1^-) = -1$ and $f'(1^+) = 1$

Also, $g(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \begin{cases} \pi + 2\tan^{-1} x; & x < 0 \\ \pi - 2\tan^{-1} x; & x \geq 0 \end{cases}$$

$g(x) = \pi + 2\tan^{-1} x, x < 0$

$$\therefore\ g'(x) = 0 + \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{-2(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\ g''(x=-1) = \frac{4}{4} = 1$$

Paragraph for Question D08/3/214 to D08/3/215

If a function (continuous and twice differentiable) is always concave upward in an interval, then its graph lies always below the segment joining extremities of the graph in that interval and vice versa.

यदि एक फलन (संतत् तथा दो बार अवकलनीय) हमेशा एक अन्तराल में ऊपर की ओर अवतल है, तो इस अन्तराल में ग्राफ के अन्तिम सिरों को जोड़ने वाली रेखा से ग्रफ हमेशा नीचे स्थित होगा तथा इसका विपरीत भी सत्य होगा।

D08/3/214. Let f(x), f' (x) and f" (x) are all positive $\forall\, x \in [0, 7]$. If $f^{-1}(x)$ exists, then $3f^{-1}(4) - f^{-1}(2) - 2f^{-1}(5)$ is :

(A) always positive (B) always negative (C) non-negative (D) non-positive

माना f(x), f ' (x) तथा f " (x) सभी धनात्मक है $\forall\, x \in [0, 7]$ । यदि $f^{-1}(x)$ विद्यमान है, तो $3f^{-1}(4) - f^{-1}(2) - 2f^{-1}(5)$ का मान होगा :

(A) सदैव धनात्मक (B) सदैव ऋणात्मक (C) अऋणात्मक (D) अधनात्मक

Ans. AC

Sol. $f''(x) > 0 \Rightarrow$ is concave upward

$\Rightarrow f^{-1}$ is concave downwards

Consider point dividing the join of this segment in ratio 2 : 1 is given as

$\left(4, \dfrac{2f^{-1}(5) + f^{-1}(2)}{3}\right)$, where upon a point $(4, f^{-1}(4))$ no graph of $f^{-1}(x)$ is always above it

$\Rightarrow 3f^{-1}(4) - f^{-1}(2) - 2f^{-1}(5) > 0$

D08/3/215. Let $f : R^+ \to R^+$ is such that $f''(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, b]$ then value of $\int_a^b f(x)dx$ cannot exceed :

(A) $(f(a) + f(b))(b - a)$ (B) $\dfrac{(f(b) - f(a))(b - a)}{2}$

(C) $\dfrac{(f(b) + f(a))(b - a)}{2}$ (D) None of these

माना $f : R^+ \to R^+$ इस प्रकार है कि $f''(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, b]$ तो $\int_a^b f(x)dx$ का मान से अधिक नही हो सकता :

(A) $(f(a) + f(b))(b - a)$ (B) $\dfrac{(f(b) - f(a))(b - a)}{2}$

(C) $\dfrac{(f(b) + f(a))(b - a)}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. AC

Sol. $\int_a^b f(x)\,dx$ is area bounded by curve in first quadrant $\frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2}$ is area of trapezium ABCD which is alws more than or equal to $\int_a^b f(x)\,dx$.

Paragraph for Question D08/3/216 to D08/3/217

Consider the circle $S \equiv x^2 + y^2 = 4$ and a fixed point A(2, 0) on it. Let P be a variable point on circle. Chord PQ is drawn parallel to diameter of circle through A, whose mid point is R. Locus of intersection of CP and AR is the conic S^1, whose equation is $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy - 8 = 0$ ('C' is centre of circle). On the basis of above information, answer the following question :

माना एक वृत $S \equiv x^2 + y^2 = 4$ तथा इस पर एक स्थिर बिन्दु A(2, 0) है। माना एक चर बिन्दु P वृत पर स्थित है। वृत का व्यास जो कि A से गुजरता है, के समान्तर एक जीवा PQ खींची जाती है जिसका मध्य बिन्दु R है। CP तथा AR के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ वक्र S^1 है, जिसका समीकरण $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy - 8 = 0$ ('C' वृत का केन्द्र है) । ऊपर दी गई सूचना के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उतर दीजिए।

D08/3/216. Length of latus rectum of the conic S^1 is :

वक्र S^1 के नाभि लम्ब की लम्बाई होगी :

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

Ans. B

Sol.

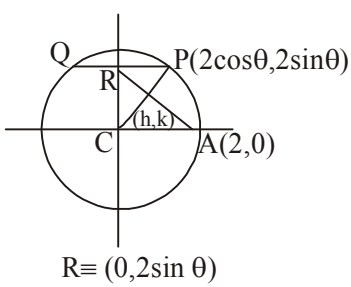
D08/3/217. If P(m, n) lies on both $y = x^2 - gx$ & $y = x - 3b$, then possible value(s) of m is/are :

यदि P(m, n) दोनों $y = x^2 - gx$ तथा $y = x - 3b$ पर स्थित है, तो m के संभावित मान होगें :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Ans. BC

Sol.



$$\tan\theta = \frac{k}{h}$$

$$-\sin\theta = \frac{k}{h-2}$$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{-h}{h-2}$

Eliminating θ

$k^2 + h^2 = (h-2)^2$

$y^2 = 4 - 4x$

$y^2 = -4(x-1)$

LR = 4

$y^2 + 4x - 4 = 0$

a = 0, b = 2, g = 4, f = 0

$y = x^2 - 4x,\ y = x - 6$

$x^2 - 4x = x - 6 \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

Paragraph for Question D08/3/218 to D08/3/220

Let $f(x) < 0\ \forall\ x \in (-\infty, 0)$ and $f(x) > 0\ \forall\ x \in (0, \infty)$ also $f(0) = 0$. Again $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (-\infty, -1)$ and $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (-1, \infty)$ also $f'(-1) = 0$ given $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ and $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ and function is twice differentiable.

माना $f(x) < 0\ \forall\ x \in (-\infty, 0)$ तथा $f(x) > 0\ \forall\ x \in (0, \infty)$ और $f(0) = 0$ है। पुनः $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (-\infty, -1)$ तथा $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (-1, \infty)$ और $f'(-1) = 0$ है। दिया गया है $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ तथा $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ और फलन द्विअवकलनीय है।

D08/3/218. If $f''(x) > 0\ \forall\ x \in (-1, \infty)$ and $f'(0) = 1$ then number of solutions of equation $f(x) = x$ is :

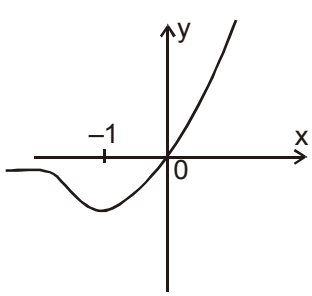
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) None of these

यदि $f''(x) > 0\ \forall\ x \in (-1, \infty)$ तथा $f'(0) = 1$ हैं तो समीकरण $f(x) = x$ के हलों की संख्या होगी :

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. D

Sol.



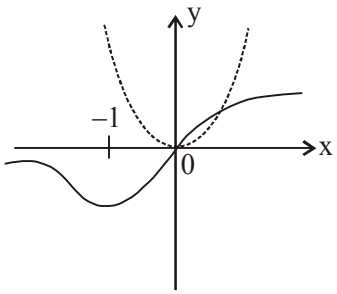
D08/3/219. If $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (0, \infty)$ and $f'(0) = 1$ then number of solutions of equation $f(x) = x^2$ is :

यदि $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (0, \infty)$ तथा $f'(0) = 1$ हैं तो समीकरण $f(x) = x^2$ के हलों की संख्या होगी :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Ans. B

Sol.



D08/3/220. The minimum number of points where $f''(x)$ is zero is :

बिन्दुओं की न्यूनतम संख्या जहाँ $f''(x)$ शून्य है, होगी :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

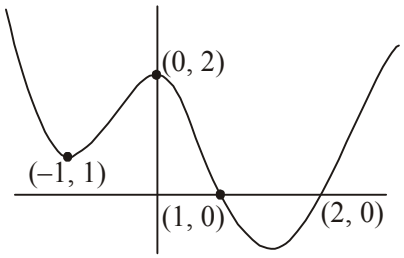
Ans. A

Sol.

Paragraph for Question D08/3/221 to D08/3/223

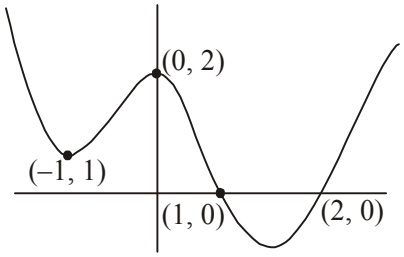
In the given figure graph of

$y = p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ is given.



नीचे दिए गए रेखाचित्र में

$y = p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ दिया गया है।



D08/3/221. The product of all imaginary roots of $p(x) = 0$ is :

(A) –2 (B) –1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) None of these

$p(x) = 0$ के सभी काल्पनिक मूलों का गुणनफल होगा :

(A) –2 (B) –1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. D

Sol. By putting $x = 1, 2, -1, 0$ weget a, b, c, d clearly other roots product is 1.

D08/3/222. If $p(x) + k = 0$ has 4 distinct real roots $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ then $[\alpha] + [\beta] + [\gamma] + [\delta]$, (where [.] denotes greatest integer function) is equal to :

यदि $p(x) + k = 0$ के चार भिन्न मूल $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ हैं तो $[\alpha] + [\beta] + [\gamma] + [\delta]$, (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है) बराबर होगा :

(A) –1 (B) –2 (C) 0 (D) 1

Ans. A

Sol. $P(x) + k = 0$ has 4 distinct real roots

$P(x) = -k$, where $-k \in (1, 2) \Rightarrow k \in (-2, -1)$

$\therefore$ pull the graph more than 1 and less than 2, now the graph interset the x-axis in $(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (2, 3)$

$\therefore -2 + (-1) + 0 + 2 = -1$

D08/3/223. The minimum number of real roots of equation $(p'(x))^2 + p(x)p''(x) = 0$ are :

समीकरण $(p'(x))^2 + p(x)p''(x) = 0$ के वास्तविक मूलों की न्यूनतम संख्या होगी :

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Ans. B

Sol. $P(x) = 0$ has two roots

$P'(x) = 0$ has three roots

$P'(x)\,P(x) = 0$ has atleast 5 roots

$(P'(x))^2 + P(x)\,P''(x) = 0 \Rightarrow (P'(x)\,P(x))^1 = 0$ has atleast four roots

Paragraph for Question D08/3/224 to D08/3/226

The differentiable function $y = f(x)$ has a property that the chord joining any two points $A(x_1, f(x_1))$ and $B(x_2, f(x_2))$ always intersects y axis at $(0, 2\,x_1x_2)$. Given that $f(1) = -1$.

अवकलनीय फलन $y = f(x)$ का एक गुण है कि किन्हीं भी दो बिन्दुओं $A(x_1, f(x_1))$ तथा $B(x_2, f(x_2))$ को मिलाने वाली जीवा हमेशा y-अक्ष को $(0, 2\,x_1x_2)$ पर प्रतिच्छेद करती है। दिया गया है $f(1) = -1$.

D08/3/224. $\int_0^{1/2} f(x)\,dx =$:

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{24}$

Ans. D

Sol. The equation of chord AB will be $y - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$

This line passes through $(0, 2x_1\,x_2)$ $\therefore\ 2x_1\,x_2 - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(-x_1)$

$\Rightarrow 2x_1\,x_2 = \frac{(x_2-x_1)f(x_1) - x_1 f(x_2) + x_1 f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\Rightarrow 2x_1\,x_2(x_2-x_1) = x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2} = 2(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} + 2x_1 = \frac{f(x_2)}{x_2} + 2x_2 = k$ $\therefore\ \frac{f(x)}{x} + 2x = k$ $\therefore\ f(x) = kx - 2x^2$

Given that $f(1) = -1$ $\therefore\ -1 = k - 2$ $\therefore\ k = 1$ $\therefore\ f(x) = x - 2x^2$

$\therefore\ \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$

D08/3/225. The largest interval in which f(x) is monotonically increasing, is :

सबसे बड़ा अंतराल जिसमें f(x) एकरस वर्धमान है, होगा :

(A) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{-1}{2}, \infty\right)$ (C) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{-1}{4}, \infty\right)$

Ans. C

Sol. The equation of chord AB will be $y - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$

This line passes through $(0, 2x_1\,x_2)$ $\therefore\ 2x_1\,x_2 - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(-x_1)$

$\Rightarrow 2x_1 x_2 = \frac{(x_2 - x_1) f(x_1) - x_1 f(x_2) + x_1 f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\Rightarrow 2x_1 x_2 (x_2 - x_1) = x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2} = 2(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} + 2x_1 = \frac{f(x_2)}{x_2} + 2x_2 = k$ $\therefore \frac{f(x)}{x} + 2x = k \therefore f(x) = kx - 2x^2$

Given that $f(1) = -1$ $\therefore -1 = k - 2$ $\therefore k = 1$ $\therefore f(x) = x - 2x^2$

$f'(x) = 1 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$

D08/3/226. In which of the following intervals, the Rolle's Theorem is applicable to the function $F(x) = f(x) + x$:

निम्न में से किस अंतराल में, रोले का प्रमेय फलन $F(x) = f(x) + x$ पर लागू होता है :

(A) $[-1, 0]$ (B) $[0, 1]$ (C) $[-1, 1]$ (D) $[0, 2]$

Ans. B

Sol. The equation of chord AB will be $y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

This line passes through $(0, 2x_1 x_2)$ $\therefore 2x_1 x_2 - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(-x_1)$

$\Rightarrow 2x_1 x_2 = \frac{(x_2 - x_1) f(x_1) - x_1 f(x_2) + x_1 f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\Rightarrow 2x_1 x_2 (x_2 - x_1) = x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2} = 2(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} + 2x_1 = \frac{f(x_2)}{x_2} + 2x_2 = k$ $\therefore \frac{f(x)}{x} + 2x = k$ $\therefore f(x) = kx - 2x^2$

Given that $f(1) = -1$ $\therefore -1 = k - 2$ $\therefore k = 1$ $\therefore f(x) = x - 2x^2$

$F(x) = f(x) + x = 2x - 2x^2$

clearly $F(0) = F(1) = 0$

$\therefore$ Rolle's theorem is applicable in $[0, 1]$

Paragraph for Question D08/3/227 to D08/3/228

Suppose a function f(x) satisfies the following conditions

$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) f(y)}$, $\forall$ x, y $\in$ R and $f'(0) = 1$.

Also $-1 < f(x) < 1$, $\forall$ x $\in$ R

मान लीजिए कि फलन f(x) निम्न शर्तों को संतुष्ट करता है

$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) f(y)}$, $\forall$ x, y $\in$ R तथा $f'(0) = 1$.

$-1 < f(x) < 1, \forall x \in R$

D08/3/227. f(x) increases in the complete interval :

f(x) पूर्ण अंतराल में बढ़ता है :

(A) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ (B) $(-\infty, \infty)$

(C) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ (D) $(0, 1) \cup (1, \infty)$

Ans. B

Sol.

D08/3/228. The value of the limit $\underset{x\to\infty}{\ell t}(f(x))^x$ is :

$\underset{x\to\infty}{\ell t}(f(x))^x$ का मान होगा :

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) e^2

Ans. B

Sol. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(h)\dfrac{(1-(f(x))^2)}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} f'(0)(1-f(x)^2)$ $(f(0)=0)$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in R$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^x = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{(e^{2x}+1)}} = 1$

Paragraph for Question D07/3/229 to D07/3/230

A(0,0) and B(8,2) are fixed points on the curve $y^3 = |x|$. A point C starts moving from origin along the curve $(x < 0)$ such that rate of change in the ordinate is 2cm/sec. After t_0 seconds triangle ABC become a right triangle.

On the basis of above information, answer the following questions :

A(0,0) तथा B(8,2) वक्र $y^3 = |x|$ पर नियत बिन्दु है। एक बिन्दु C, मूलबिन्दु से प्रारम्भ होकर वक्र $(x < 0)$ के अनुदिश इस प्रकार गति करता है कि इसके भुज में परिवर्तन की दर 2 सेमी/सेकण्ड है। t_0 सेकण्ड पश्चात त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज बन जाता है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

D07/3/229. t_0 is :

(A) 1 sec (B) 2 sec (C) $\frac{1}{4}$ sec (D) $\frac{1}{2}$ sec

t_0 होगा :

(A) 1 सैकण्ड (B) 2 सैकण्ड (C) $\frac{1}{4}$ सैकण्ड (D) $\frac{1}{2}$ सैकण्ड

Ans. C

Sol. $\because$ speed of y-coordinate is 2cm/sec and it starts from (0,0)

$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{4}\text{sec}$ to reach at C.

D07/3/230. After t_0 seconds, tangent is drawn to the curve at point C to intersect it again at (α,β) then $4\alpha + 3\beta$ is :

t_0 सेकण्ड पश्चात, वक्र के बिन्दु C पर खींची गई स्पर्श रेखा इसको पुनः बिन्दु (α, β) पर प्रतिच्छेद करती है, तो $4\alpha + 3\beta$ का मान होगा :

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 2 (D) 1

Ans. D

Sol.

$$\frac{\beta - \frac{1}{2}}{\alpha + \frac{1}{8}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_C$$

$$\frac{(2\beta - 1)4}{8\alpha + 1} = -\left.\frac{1}{3y^2}\right|_{y=\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\beta - 1}{8\alpha + 1} = -\frac{1}{3}$$

$6\beta - 3 = -8\alpha - 1$

$6\beta + 8\alpha = 2$

$3\beta + 4\alpha = 1$

$\Rightarrow$ (D) is correct

Paragraph for Question T03/3/231 to T03/3/232

Consider a right angled triangle ABC right angle at C and AB = c, BC = a, AC = b.

On the basis of above information, answer the following questions :

माना त्रिभुज ABC शीर्ष C पर समकोण है तथा AB = c, BC = a, AC = b है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर, निम्न प्रश्नों के उतर दीजिए।

T03/3/231. If sides a,b,c are in G.P, then ratio of shortest side to largest side is :

यदि भुजायें a, b, c गुणोतर श्रेणी में हो, तो सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी भुजा का अनुपात होगा :

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Ans. A

Sol. Let sides are a, ar, ar^2, where ar = b, $ar^2 = c$

$(ar^2)^2 = a^2 + (ar)^2$

$r^4 - r^2 - 1 = 0$

$r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ratio $\frac{a}{c} = \frac{a}{ar^2} = \frac{1}{r^2}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

T03/3/232. If a circle with AB as fixed diameter is described and P is any point on circumference, then :

(A) Area of ΔABP is maximum when it is isosceles.

(B) Area of ΔABP is minimum when it is isosceles.

(C) Perimeter of ΔABP is minimum when it is isosceles.

(D) Area of ΔABP is constant.

यदि AB को नियत व्यास मानकर एक वृत खींचा जाता है, जिसकी परिधि पर कोई बिन्दु P है, तो :

(A) त्रिभुज ΔABP का क्षेत्रफल अधिकतम होगा, जब त्रिभुज समद्विबाहु हो।

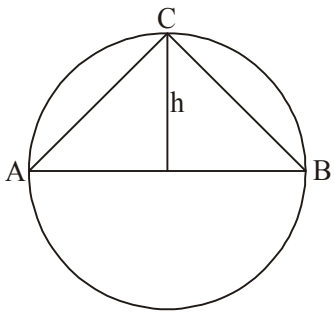
(B) त्रिभुज ΔABP का क्षेत्रफल न्यूनतम होगा, जब त्रिभुज समद्विबाहु हो।

(C) त्रिभुज ΔABP का परिमाण न्यूनतम होगा, जब त्रिभुज समद्विबाहु हो।

(D) त्रिभुज ΔABP का क्षेत्रफल अचर होगा।

Ans. A

Sol. Area max when hight is max, so it is isoceles.



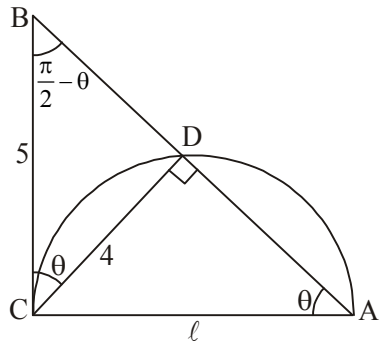
T03/3/233. Let BC = 5 and a semicircle with AC as diameter is described. If a chord joining C with point of intersection D of hypotenuse and semicircle, such that CD = 4, then length of AC is :

BC = 5 तथा AC को व्यास मानकर एक अर्द्धवृत खींचा जाता है। यदि बिन्दु C तथा कर्ण व अर्द्धवृत के प्रतिच्छेद बिन्दु D को मिलाने वाली रेखा इस प्रकार है कि CD = 4 हो, तो AC की लम्बाई होगी :

(A) $\frac{20}{\sqrt{34}}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\sqrt{20}$ (D) $\frac{20}{3}$

Ans. D

Sol. ΔADC and ABC are similar



$\sin\theta = \frac{4}{\ell} = \frac{5}{\sqrt{\ell^2+25}}$

$\Rightarrow \frac{16}{\ell^2} = \frac{25}{\ell^2+25}$

$\Rightarrow 16\left(\ell^2+25\right) = 25\ell^2$

$\Rightarrow 16\times 25 = 9\ell^2 \Rightarrow 3\ell = 4\times 5 \Rightarrow \ell = \frac{20}{3}$

INTEGER TYPE QUESTIONS

D05/4/234. If $x \in (-1, 0)$ and $f(x) = \frac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{1-x+\sqrt{1+x^2}}$, then number of solution (s) of the equation cot(f(x)) = 4 is k.Let $f(x)$ be a differentiable function on interval (k, ∞) such that $f(1) = \frac{1}{4}$ and $\lim_{h\to x}\frac{h^3f(x)-x^3f(h)}{h^2-x^2} = \frac{1}{2}$, then 24f(2) has value equal to _____.

यदि $x \in (-1, 0)$ तथा $f(x) = \frac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{1-x+\sqrt{1+x^2}}$ हो, तो समीकरण cot(f(x)) = 4 के हलों की संख्या k होगी।माना $f(x)$, अन्तराल (k, ∞) पर एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(1) = \frac{1}{4}$ तथा $\lim_{h\to x}\frac{h^3f(x)-x^3f(h)}{h^2-x^2} = \frac{1}{2}$ है, तो 24f(2) का मान होगा

Ans. 3

Sol.

D05/4/235. The value of $7+\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left[\cos\left\{\cos^{-1}(\cos x)+\sin^{-1}(\sin x)\right\}\right]$ where $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ is k.A differentiable function f satisfying a relation $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)-\frac{1}{3}\forall x,y\in R$ and $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3f(h)-1}{kh}=\frac{2}{3}$. Find the value of definite integral $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ _____.

$7+\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left[\cos\left\{\cos^{-1}(\cos x)+\sin^{-1}(\sin x)\right\}\right]$ का मान k है जहाँ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ है। एक अवकलनीय फलन f एक संबंध $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)-\frac{1}{3}\forall x,y\in R$ को संतुष्ट करता है तथा $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3f(h)-1}{kh}=\frac{2}{3}$ है। $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए _____.

Ans. 2

Sol. $f\frac{c}{d}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-\frac{1}{3}}{h}=2x(x+h)$

$\Rightarrow\ f\frac{c}{d}(x)=\frac{4}{3}+2x^2\ \Rightarrow f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}$

D05/4/236. The number of integer(s) in the range of $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)+\cos^{-1}(\cos x)\ \forall\ x\in R$ is k.If f(1) = 1 and $\int_0^1 f(t)dt=2$ and $g(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}.f(t)\,dt$, then slope of tangent of function $h(x)=(g^n(x))^2$ at x = 1, is L. then value of k + L _____.

$f(x)=\sin^{-1}(\sin x)+\cos^{-1}(\cos x)\ \forall\ x\in R$ के परिसर में पूर्णाकों की संख्या k है। यदि f(1) = 1 तथा $\int_0^1 f(t)dt=2$ तथा $g(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}.f(t)\,dt$ है, तब फलन $h(x)=(g^n(x))^2$, x = 1 पर स्पर्शरेखा का ढाल L है। तब k + L का मान होगा _____.

Ans. 8

Sol. $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)+\cos^{-1}(\cos x)$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ 3\pi-2x & x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right] \\ 0 & x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] \end{cases}$$

$\therefore$ Range of f(x) is $[0, \pi]$

$\therefore g^n(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ and $g^m(x)=f(x)$

$\Rightarrow g^n(1)=2$ and $g^m(1)=1$

i.e. $h'(1)=2g^n(1).\ g^m(1)=2\times 2\times 1=4$

D05/4/237. a differentiable function f satisfies $(x-y)\,f(x+y)-(x+y)\,f(x-y)=2(x^2y-y^3)\ \forall\ x, y\in R$ and $f(1)=2$. If f(2) is k. From a point on the line $x-y+2=0$ tangents are drawn to the hyperbola $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{2}=1$ such that the chord of contact passes through a fixed point (λ, μ). Then $\frac{\lambda}{\mu}$ is equal to _____.

यदि अवकलन समीकरण $(x-y)\,f(x+y)-(x+y)\,f(x-y)=2(x^2y-y^3)\ \forall\ x, y\in R$ को संतुष्ट करती है, एवं $f(1)=2$ तथा $f(2)=k$ है। रेखा $x-y+2=0$ पर स्थित किसी बिन्दु से अतिपरवलय $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{2}=1$ पर स्पर्श रेखायें इस प्रकार खींची जाती है कि स्पर्श जीवा निश्चित बिन्दु (λ, μ) से गुजरती है। तब $\frac{\lambda}{\mu}$ का मान होगा _____.

Ans. 3

Sol. Put $y=h$

$\Rightarrow$ $x[f(x+h)-f(x-h)]-h[f(x+h)+f(x-h)]=2(x^2h-h^3)]$

or $\lim_{h\to 0} x\frac{\left[f(x+h)-f(x-h)\right]}{h}-\left[f(x+h)+f(x-h)\right]=\lim_{h\to 0}2\left(x^2-h^2\right)$

$\Rightarrow$ $xf'(x)-f(x)=x^2$ $\Rightarrow$ $f(x)=x^2+x$

Let the point P on the line $x-y+2=0$ is $(\alpha, \alpha+2)$.

Equation of chord of contact :

$$\frac{x\alpha}{6}-\frac{y(\alpha+2)}{2}=1$$

$\Rightarrow x\alpha - 3y\alpha - 6y = 6$

$\Rightarrow \alpha(x - 3y) - 6y - 6 = 0$

Passes through intersection of $x - 3y = 0$ and $6y + 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -3$ and $\mu = -1$

$$\frac{\lambda}{\mu}=3$$

D05/4/238. $f(x) = |(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(x^2 - 3x + a)|$ ($a \in R$ and $a < \frac{9}{4}$).

If f(x) is non-derivable at exactly 3 points then possible value of 'a' is _____.

$f(x) = |(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(x^2 - 3x + a)|$ ($a \in R$ तथा $a < \frac{9}{4}$).

यदि f(x) 3 बिन्दुओं पर अन–अवकलनीय है तो 'a' का संभव मान होगा _____.

Ans. 0

Sol.

D05/4/239. Let $f(x)=\begin{cases} ax(x-1)+b; & x<1 \\ x+2; & 1\le x\le 3 \\ px^2+qx+2; & x>3 \end{cases}$ is continuous $\forall\, x \in R$ except $x = 1$ but $|f(x)|$ is differentiable every where and $f'(x)$ is continuous at $x = 3$ and $|a + p + b + q| = k$, then $k =$ _____.

माना $f(x)=\begin{cases} ax(x-1)+b; & x<1 \\ x+2; & 1\le x\le 3 \\ px^2+qx+2; & x>3 \end{cases}$, $\forall\, x \in R$ में $x = 1$ को छोड़कर सतत् है लेकिन $|f(x)|$ सभी जगह अवकलनीय है तथा $f'(x)$, $x = 3$ पर सतत् है तथा $|a + p + b + q| = k$, तब $k =$ _____.

Ans. 3

Sol. f(x) is discontinuous at $x = 1$ $|f(x)|$ is diff everywhere

$f(1) = -f(1^+) = -f(1^-)$

$\Rightarrow \quad 3 = -(o + b)$

$\Rightarrow \quad b = -3$

$f'(1^+) = -f'(1^-)$ (as $|f(x)|$ is differentiable every where)

$\therefore \quad 1 = -(2a - a) \Rightarrow a = -1$

continuous at $x = 3$, so, $5 = 9p + 3q + 2$

$\Rightarrow \quad 3p + q = 1 \quad .....(1)$

$f'(x)$ is continuous at $x = 3$

so $f'(3^-) = f'(3^+)$

$\Rightarrow \quad 6p + q = 1 \quad .....(2)$

on sloving (1) & (2) weget $p = 0$, $q = 1$

so $|a + b + p + q| = |-1 - 3 + 0 + 1| = \mathbf{3}$

D05/4/240. Let $f(x) = x^2 + ax + 3$ and $g(x) = x + b$, where $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x) + (x^2)^n g(x)}{1 + (x^2)^n}$. If F(x) is continuous at x = 1 and x = –1 then find the value of $(a^2 + b^2)$ _____.

माना $f(x) = x^2 + ax + 3$ तथा $g(x) = x + b$ हैं, जहाँ $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x) + (x^2)^n g(x)}{1 + (x^2)^n}$ । यदि F(x), x = 1 तथा x = –1 पर सतत् है तब $(a^2 + b^2)$ का मान ज्ञात कीजिए _____.

Ans. **17**

Sol. $F(x) = g(x) \qquad x > 1$

$= \dfrac{f(x) + g(x)}{2} \qquad x = 1$

$= f(x) \qquad -1 < x < 1$

$= \dfrac{f(x) + g(x)}{2} \qquad x = -1$

$= g(x) \qquad x < -1$

if F(x) is continuous at x = 1

$F(1^+) = F(1) = F(1^-)$

$b = a + 3$

if F(x) is continuous at x = –1

$F(-1^-) = F(-1) = F(-1^+)$

$a + b = 5$